

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES
APPLIQUÉES DE ROUEN

INSA DE ROUEN



ASI 3.1

Algèbre linéaire

Soufiane BELHARBI
soufiane.belharbi@insa-rouen.fr

01 Septembre 2016

Résumé

Ce support contient quelques rappels sur des notions de base de l'algèbre linéaire avec quelques exercices. C'est fait pour les étudiants ASI3.1.

Merci de me contacter si vous trouvez des erreurs dans le document :
soufiane.belharbi@insa-rouen.fr.

Keywords: algèbre linéaire, matrice, vecteur.

Table des matières

1	Série 1 : Équations linéaires en algèbre linéaire	3
2	Série 2 : Calcul matriciel	8
3	Décomposition LU (hors série)	20
4	Décomposition des matrices symétriques : LDM^T, LDL^T et Cholesky	27
5	Les moindres carrés dans \mathbb{R} (régression simple)	30
6	Factorisation QR : Méthode de Householder	38
7	Méthodes itératives pour la résolution d'un système linéaire	44
	7.1 Normes des vecteurs/matrices	44
	7.2 Méthode itératives : Jacobi, Gauss-Seidel	51
8	Valeurs et vecteurs propres	55
9	Série 3 : Déterminants	69
	References	69

1 Série 1 : Équations linéaires en algèbre linéaire

Équations vectorielles

Vecteurs de \mathbb{R}^n

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, u_i \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$= [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n]^T, T : \textit{transposé} \quad (2)$$

Exemples : $\mathbf{u} = [1.2 \quad 0.75]^T \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{u} = [7 \quad 8.45 \quad 9.88]^T \in \mathbb{R}^3$.

Vecteur nul

$$\mathbf{0} = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n]^T, u_i = 0 \quad (3)$$

Propriétés algébriques de \mathbb{R}^n

Soient \mathbf{u} , \mathbf{v} et \mathbf{w} vecteurs de \mathbb{R}^n . c et d des scalaires réels :

- | | |
|--|--|
| (i) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ | (v) $c(\mathbf{u} + \mathbf{u}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$ |
| (ii) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ | (vi) $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$ |
| (iii) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$ | (vii) $c(d\mathbf{u}) = (cd)(\mathbf{u})$ |
| (iv) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = -\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$ | (viii) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$ |

Combinaisons linéaires

Soient $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$ des vecteurs de \mathbb{R}^n , et c_1, c_2, \dots, c_p des scalaires réels. Le vecteur \mathbf{y} défini comme :

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \dots + c_p\mathbf{u}_p \quad (4)$$

est appelé **combinaison linéaire** de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$. Les scalaires c_1, c_2, \dots, c_p sont appelés les *coefficients* de la combinaison.

Définition

Soient $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$ des vecteurs de \mathbb{R}^n . L'ensemble des combinaisons linéaires de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$ est noté $\text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$ est appelé **partie de \mathbb{R}^n**

engendrée par les vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$. Autrement dit, $\text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$ est l'ensemble de tous les vecteurs qui s'écrivent sous la forme :

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_p\mathbf{v}_p, \text{ où } c_i \text{ sont des scalaires.} \quad (5)$$

Exercice 1.1

Calculer les deux combinaisons : $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ et $\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$, tel que : $\mathbf{u} = [-1 \ 2]^T$, $\mathbf{v} = [-3 \ -1]^T$.

Solution 1.1

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = [-4 \ 1]^T, \mathbf{u} - 2\mathbf{v} = [5 \ 4]^T.$$

L'équation matricielle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Définition

Si A est une matrice de $m \times n$, de colonnes $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$, et si \mathbf{x} est un vecteur de \mathbb{R}^n , alors on appelle **produit de A par \mathbf{x}** , et on note $A\mathbf{x}$, **la combinaison linéaire des colonnes de A dont les coefficients sont les composantes correspondantes de \mathbf{x}** :

$$A\mathbf{x} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n \quad (6)$$

Le produit $A\mathbf{x}$ est défini si le nombre des colonnes de A est égale au nombre des composantes de \mathbf{x} .

Autre manière de calculer $A\mathbf{x}$ (règle ligne-vecteur)

Si le produit $A\mathbf{x}$ est défini, alors la i^e composante de $A\mathbf{x}$ est la somme des produits des composantes correspondantes de la ligne i de A et du vecteur \mathbf{x} .

Propriété du produit d'une matrice par un vecteur

Soit A une matrice $m \times n$, \mathbf{u} et \mathbf{v} des vecteurs de \mathbb{R}^n et c un scalaire. Alors, on a les relations :

- a. $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$
- b. $A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u})$

Exercice 1.2

Calculer les produits suivants, d'abord en utilisant la définition, ensuite en utilisant la méthode ligne-vecteur.

$$\begin{array}{ll}
\text{a. } \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} & \text{e. } \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} \\
\text{b. } \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} & \text{f. } \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \\
\text{c. } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} & \text{g. } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
\text{d. } \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix} &
\end{array}$$

Solution 1.2

$$\begin{array}{ll}
\text{a. } \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ n'est pas défini.} & \text{f. } \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 32 \\ -6 \end{bmatrix} \\
\text{b. } \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ n'est pas défini.} & \text{g. } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \text{ La} \\
\text{c. } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix} & \text{matrice } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dont la} \\
\text{d. } \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ n'est pas défini.} & \text{quelle il y a que des 1 sur la diagonale et des 0 ailleurs est appelée } \mathbf{matrice\ unit\acute{e}} \text{ et not\acute{e } } I. \\
\text{e. } \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} & \text{Pour tout vecteur } \mathbf{x} \text{ de } \mathbb{R}^3, \text{ on a : } I\mathbf{x} = \mathbf{x}. \text{ De mani\`ere g\`enerale, pour toute matrice unit\acute{e } } n \times n, \text{ not\acute{e } } I_n \text{ et pour tout vecteur } \mathbf{x} \text{ de } \mathbb{R}^n, \text{ cela est v\`erifi\acute{e } : } I_n\mathbf{x} = \mathbf{x}.
\end{array}$$

Ind\`ependance lin\`eaire

On dit qu'une famille $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p)$ de vecteurs de \mathbb{R}^n est **libre**, ou que ses vecteurs, sont **lin\`eairement ind\`ependants** si l'\`equation vectorielle

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0} \quad (7)$$

admet la solution triviale comme *unique* solution. On dit que la famille $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p)$ est **li\`ee**, ou que ses vecteurs, sont **lin\`eairement ind\`ependants** s'il existe des coefficients c_1, \dots, c_p , non tous nuls, tel que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}. \quad (8)$$

Introduction aux applications linéaires

Une façon de voir l'équation matricielle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est de considérer le vecteur \mathbf{b} comme une combinaison linéaire des colonnes de A . Une autre manière, issue des applications réelles, est d'interpréter A comme un objet qui "agit" sur un vecteur \mathbf{x} par multiplication pour produire \mathbf{b} .

Transformations matricielles

On définit la transformation T tel que :

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ \mathbf{x} &\mapsto A\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{9}$$

A est une matrice de la forme $m \times n$. \mathbb{R}^n est l'espace de départ. \mathbb{R}^m est l'espace d'arrivée. Le vecteur $T(\mathbf{x})$ est l'image de \mathbf{x} .

Applications linéaires

On dit qu'une application (ou transformation) T est **linéaire** si :

- (i) $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$
- (ii) $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$

c est un scalaire. *Résultats*

Soit T une application linéaire. Alors :

$$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \tag{10}$$

et

$$T(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = cT(\mathbf{u}) + dT(\mathbf{v}) \tag{11}$$

Tel que \mathbf{u} et \mathbf{v} sont deux vecteurs dans l'espace de départ de T . c et d sont deux scalaires. Un autre résultat :

$$T(c_1\mathbf{v}_1 + c_p\mathbf{v}_p) = c_1T(\mathbf{v}_1) + \cdots + c_pT(\mathbf{v}_p) \tag{12}$$

Exercice 1.3

On considère une application linéaire $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Déterminer les images T de $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.

Solution 1.3

$$T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}, T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}, T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Matrice canoniquement associée à l'application linéaire T

Soit $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Alors, il existe une unique matrice A telle que :

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \text{pour tout } \mathbf{x} \text{ de } \mathbb{R}^n \quad (14)$$

A est la matrice $m \times n$ dont la j^e colonne est le vecteur $T(\mathbf{e}_j)$, où \mathbf{e}_j est la j^e colonne de la matrice I_n :

$$A = [T(\mathbf{e}_1) \quad \dots \quad T(\mathbf{e}_n)] \quad (15)$$

La matrice A est appelée **la matrice canoniquement associée à l'application linéaire T** .

Exercice 1.4

Déterminer la matrice A canoniquement associée à l'application linéaire : $T(\mathbf{x}) = 3\mathbf{x}$, pour tout \mathbf{x} dans \mathbb{R}^2 .

Solution 1.4

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

2 Série 2 : Calcul matriciel

Opérations matricielles

Si A est une matrice $m \times n$ - c'est à dire à m lignes et n colonnes-, alors le coefficient scalaire situé à la i^e ligne et la j^e colonne de A , noté a_{ij} , est appelé coefficient (i, j) de A . Chaque colonne de A est une liste de m réels, qui définit un vecteur de \mathbb{R}^m . On note souvent ces colonnes $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$, et l'on écrit la matrice A sous la forme :

$$A = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \dots \quad \mathbf{a}_n] \quad (16)$$

a_{ij} est le i^e coefficient du j^e vecteur colonne \mathbf{a}_j . (Voir la figure Fig.1)

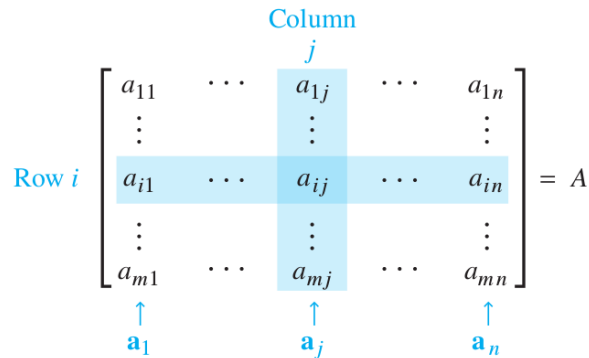


FIGURE 1 – Lignes et colonnes d'une matrice.

On appelle **coefficients diagonaux** d'une matrice $m \times n$, $A = [a_{ij}]$, les coefficients : $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots$, ils forment la **diagonal principale** de A .

On appelle **matrice diagonale** une matrice carrée $n \times n$ dont les coefficients non diagonaux sont nuls. La matrice unité I_n est un exemple.

On appelle **matrice nulle**, est on le note 0 , la matrice $m \times n$ dont tous les coefficients sont nuls.

Somme et multiplication par un scalaire

Deux matrices **égales** si elles ont la même taille (même nombre de lignes et de colonnes) et que les colonnes correspondantes sont égales (les coefficients correspondants sont égaux).

Si A et B sont deux matrices $m \times n$, alors on appelle **somme** $A + B$ la matrice $m \times n$ dont les colonnes sont la somme des colonnes correspondantes de A et B .

Exercice 2.1

Calculer la somme : $A+B$, $A+C$: $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Solution 2.1

$$A+B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad A+C \text{ n'est pas définie.}$$

Si r est un scalaire et A une matrice, on définit le **produit** rA comme la matrice dont les colonnes sont obtenues en multipliant les colonnes correspondantes de A par r . Comme pour les vecteur, $-A$ désigne la matrice $(-1)A$ et $A-B$ désigne $A+(-1)B$.

Propriétés

Soit A , B deux matrices de même taille, et r et s des scalaires.

- | | |
|------------------------|---------------------|
| a. $A+B = B+A$ | d. $r(A+B) = rA+rB$ |
| b. $(A+B)+C = A+(B+C)$ | e. $(r+s)A = rA+sA$ |
| c. $A+0 = A$ | f. $r(sA) = (rs)A$ |

Exercice 2.2

Soit les matrices suivantes : $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Calculer les opération suivantes : $-2A$, $B-2A$, $A+3B$, $2C-3D$.

Solution 2.2

$$-2A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ -8 & 10 & -4 \end{bmatrix}, \quad B-2A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 3 \\ -7 & 6 & -7 \end{bmatrix}, \quad A+3B = \begin{bmatrix} 23 & -15 & 2 \\ 7 & -17 & -7 \end{bmatrix}, \quad 2C-3D \text{ n'est pas définie.}$$

Exercice 2.3

On pose : $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. Calculer $3I_2 - A$.

Solution 3.2

$$3I_2 - A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Multiplication matricielle

Soit A une matrice $m \times n$ et B une matrice $n \times p$ dont on note les colonnes $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_p$. On appelle produit de A et B et l'on note AB la matrice $m \times p$ dont les colonnes sont $A\mathbf{b}_1, \dots, A\mathbf{b}_p$, c'est à dire :

$$AB = A [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \dots \ \mathbf{b}_p] = [A\mathbf{b}_1 \ A\mathbf{b}_2 \ \dots \ A\mathbf{b}_p]. \quad (17)$$

Exercice 2.4

Calculer AB , où l'on a posé $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

Solution 2.4

$$AB = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 21 \\ -1 & 13 & -9 \end{bmatrix}.$$

Exercice 2.5

Soit A une matrice 3×5 et B une matrice 5×2 . C'est quoi la taille de AB , BA ?

Solution 2.5

AB une matrice 3×2 . BA n'est pas définie.

Règle ligne-colonne pour le calcul de AB

Si le produit AB a un sens, alors le coefficient en i^e ligne et j^e colonne de AB est la somme des produits des composantes de la i^e ligne de A et de la j^e colonne de B . Si l'on note $(AB)_{ij}$ le coefficient (i, j) de AB et si A est une matrice $m \times n$, alors :

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} \quad (18)$$

Exercice 2.6

Calculer le produit AB avec la méthode ligne-colonne, si on pose $A =$

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \\ 6 & -8 & -7 \\ -3 & 0 & 9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Solution 2.6

$$AB = \begin{bmatrix} -27 & -17 \\ 5 & 1 \\ -53 & -58 \\ 15 & 36 \end{bmatrix}.$$

Propriétés de la multiplication matricielle

Soit A une matrice $m \times n$, et B et C deux matrices telles que les sommes et produits ci-dessous aient un sens.

- $A(BC) = (AB)C$ (associativité de la multiplication)
- $A(B + C) = AB + AC$ (distributivité à gauche)
- $(B + C)A = BA + CA$ (distributivité à droite)
- $r(AB) = (rA)B$, pour tout scalaire r .
- $I_m A = A = A I_n$ (élément unité pour la multiplication)

Notes sur le produit matricielle

- En général, $AB \neq BA$.
- On ne peut pas simplifier un produit de matrices. Autrement dit, si $AB = AC$, alors, il est en général *faux* que $B = C$.
- Si un produit AB est égale à la matrice nulle, on ne peut pas en général en déduire que $A = 0$ ou $B = 0$.

Exercice 2.7

Calculer les produits suivants, si on pose les matrices : $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$: AC, CD, DB .

Solution 2.7

AC n'est pas défini. $CD = \begin{bmatrix} 1 \\ 13 \end{bmatrix}$. DB n'est pas défini.

Exercice 2.8

Calculer $A - 5I_3$ et $(5I_3)A$, où : $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & -6 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Solution 2.8

$$A - 5I_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -4 & -2 & -6 \\ -3 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad 5I_3 A = \begin{bmatrix} 25 & -5 & 15 \\ -20 & 15 & -30 \\ -15 & 5 & 10 \end{bmatrix}.$$

Exercice 2.9

Soit A une matrice 5×3 et B telle que le produit soit une matrice 5×7 . Quelle est la taille de B ?

Solution 2.9

La taille de B est 3×7 .

Exercice 2.10

Combien la matrice B compte-t-elle de lignes si BC est une matrice de 5×4 .

Solution 2.10

Le nombre de ligne de B est 5.

Exercice 2.11

Soit les matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -3 & k \end{bmatrix}$. Pour quelle(s) valeur(s) de k a-t-on $AB = BA$?

Solution 2.11

$k = -2$.

Exercice 2.12

Soit les trois matrices $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Vérifier que $AB = AC$, bien que $B \neq C$.

Solution 2.12

$$AB = \begin{bmatrix} -21 & -21 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}, AC = \begin{bmatrix} -21 & -21 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}.$$

Puissance d'une matrice

Soit A une matrice $n \times n$ et k un entier strictement positif. On note alors A^k le produit de k matrices égales à A :

$$A^k = \underbrace{A \dots A}_k \quad (19)$$

Si k est non nul et si \mathbf{x} est un vecteur de \mathbb{R}^n , alors on obtient $A^k \mathbf{x}$ en multipliant à gauche \mathbf{x} par A k fois. Si $k = 0$, alors on doit interpréter $A^0 \mathbf{x}$ comme étant \mathbf{x} lui-même. A^0 désigne la matrice unité.

Transposé d'une matrice

Si A est une matrice $m \times n$, on appelle **transposée** de A la matrice $n \times m$, notée A^T , dont les colonnes sont formées des lignes de A .

Propriétés de la transposée d'une matrice

Soit A et B deux matrices dont les tailles sont compatibles avec les sommes et produits écrits ci-dessous. Alors :

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- Pour tout scalaire r , $(rA)^T = rA^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Exercice 2.13

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ et le vecteur $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$. Calculer : $(A\mathbf{x})^T$, $\mathbf{x}^T A^T$, $\mathbf{x}^T A$, $\mathbf{x}\mathbf{x}^T$, $\mathbf{x}^T \mathbf{x}$.
Le produit $A^T \mathbf{x}^T$ est-il défini ?

Solution 2.13

$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$. $(A\mathbf{x})^T = [-4 \quad 2]$. $\mathbf{x}^T A^T = [-4 \quad 2]$. $\mathbf{x}\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} 25 & 15 \\ 15 & 9 \end{bmatrix}$. $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = 34$. $A^T \mathbf{x}^T$ n'est pas défini.

Exercice 2.14

Soit une matrice 4×4 et \mathbf{x} un vecteur de \mathbb{R}^4 . Quelle est la méthode la plus rapide pour calculer $A^2 \mathbf{x}$ sur une machine avec un seul CPU ? on dénombrera les multiplications.

Solution 2.14

Le produit $(A^2)\mathbf{x}$ nécessite $64 + 16 = 80$ multiplications. Le produit $A(A\mathbf{x})$ nécessite $16 + 16 = 32$ multiplications seulement.

Inverse d'une matrice

On dit qu'une matrice A de type $n \times n$ est **inversible** s'il existe une matrice C de taille $n \times n$ telle que :

$$CA = I \quad \text{et} \quad AC = I \quad (20)$$

où l'on a posé $I = I_n$, la matrice unité $n \times n$. Dans ce cas, la matrice C est appelée **inverse** de A . C est déterminée de façon unique par A . Cette inverse unique est notée A^{-1} . Cette matrice est caractérisée par :

$$A^{-1}A = I \quad \text{et} \quad AA^{-1} = I \quad (21)$$

Une matrice *non* inversible est parfois dite **singulière** ; on peut donc appeler **non singulière** une matrice inversible.

Inverse d'une matrice 2×2

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ une matrice 2×2 . Si $ad - bc \neq 0$, alors A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (22)$$

Si $ad - bc = 0$, A n'est pas inversible.

Le nombre $ad - bc$ est appelé **déterminant** de A , et l'on note :

$$\det A = ad - bc. \quad (23)$$

Exercice 2.15

Déterminer l'inverse de $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$.

Solution 2.15

$$\det A = -2 \neq 0. \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Solution de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Si A est une matrice $n \times n$ inversible, alors, pour tout vecteur \mathbf{b} de \mathbb{R}^n , l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admet pour unique solution le vecteur $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Propriétés de l'inversion d'une matrice

a. Si A est une matrice inversible, alors A^{-1} est inversible et

$$(A^{-1})^{-1} = A. \quad (24)$$

b. Si A et B sont deux matrices $n \times n$ inversibles, alors AB est inversible, et l'inverse de AB est le produit des inverses de A et B dans l'ordre inverse.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \quad (25)$$

- c. Si A est une matrice inversible, alors A^T l'est aussi, et l'inverse de A^T est la transposée de A^{-1} .

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T. \quad (26)$$

- d. Le produit de matrice $n \times n$ inversibles est inversible, et l'inverse est le produit des inverse en renversant l'ordre des facteurs.

*Méthode du pivot de Gauss (méthode d'élimination de Gauss-Jordan)
et formes échelonnées (Carl Friedrich Gauss, Wilhelm Jordan)*

On appelle une ligne ou colonne non nulle une ligne ou colonne contenant au moins un coefficient non nul. On appelle **coefficient principale** d'une ligne non nulle le coefficient non nul le plus à gauche dans la ligne.

On appelle **matrice triangulaire** supérieure (respectivement inférieure) une matrice carrée dont tous les termes au dessous (respectivement au dessus) la diagonale principale sont nuls.

Définition

Une matrice rectangulaire est dite **sous forme échelonnée** (ou **sous forme échelonnée en ligne**) si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

1. Toutes les lignes non nulles sont au-dessus de toutes les lignes nulles.
2. Le coefficient principale de chaque ligne se trouve dans une colonne située à droite de celle du coefficient principal de la ligne au-dessus d'elle.
3. Tous les coefficients situés dans une colonne en dessous d'un coefficient principal sont nuls.

Une matrice qui vérifie en outre les deux conditions ci-dessous est dite **sous forme échelonnée réduite** (ou **sous forme échelonnée en ligne réduite**) :

4. Le coefficient principal de toute ligne non nulle est égale à 1.
5. Les coefficients principaux (égaux à 1) sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.

On appelle **matrice échelonnée** (respectivement **matrice échelonnée réduite**) une matrice qui est sous forme échelonnée (respectivement sous forme réduite).

Unicité de la matrice échelonnée

Toute matrice est équivalente selon les lignes à une et une seule matrice échelonnée réduite.

Opérations élémentaires sur les lignes

1. (Remplacement) Remplacer une ligne par la ligne obtenue en lui ajoutant un multiple d'une autre ligne.
2. (Échanger) Échanger deux lignes.
3. (Multiplication par un scalaire) Multiplier tous les coefficients d'une ligne par une constante non nulle.

Positions de pivot

Une fois qu'une matrice a été réduite à une forme échelonnée, les opérations que l'on effectue par la suite pour obtenir la forme échelonnée réduite ne modifient pas la position des coefficients principaux. Comme la forme échelonnée réduite d'une matrice est unique, *les coefficients principaux d'une matrice échelonnée obtenue à partir d'une matrice donnée sont toujours situés à la même position*. Ces coefficients principaux correspondent aux coefficients principaux de la forme échelonnée réduite.

On appelle **position de pivot** d'une matrice A l'emplacement dans A correspondant à un coefficient principal (égal à 1) de la forme échelonnée réduite de A . On appelle **colonne pivot** une colonne de A contenant une position de pivot.

Exercice 2.16

réduire la matrice A ci-dessous à une forme échelonnée et déterminer les colonnes pivots de A . $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix}$.

Solution 2.16

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix}$

2. Échanger ligne 1 par ligne 4 : $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

3. Faire apparaître des 0 en dessous le pivot : ligne 2 = ligne 2 + ligne 1, ligne 3 = ligne 3 + 2 * ligne 1 : $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 5 & 10 & -15 & -15 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

4. ligne 3 = ligne 3 - $\frac{5}{2}$ ligne 2, ligne 4 = ligne 4 + $\frac{3}{2}$ ligne 2 : $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$. A est sous la forme échelonnée. Les pivots sont : 1, 2 et -5. Les colonnes pivots sont : 1, 2 et 4.

L'algorithme du pivot de Gauss

L'algorithme qui suit comporte quatre étapes et conduit à une matrice sous forme échelonnée. Une cinquième étape permet d'obtenir une matrice échelonnée réduite.

1. On considère la colonne non nulle la plus à gauche. C'est une colonne pivot. La position de pivot est en haut de cette colonne.
2. On choisit comme pivot un élément non nul de la colonne pivot. Si nécessaire, on échange deux lignes pour amener cet élément à la position de pivot. [si on choisit comme pivot le coefficient le plus grand en valeur absolue, on appelle cette méthode par **stratégie du pivot partiel**].
3. Au moyen d'opérations de remplacement, on fait apparaître des 0 à toutes les positions situées sous le pivot.
4. On cache (ou on ignore) la ligne contenant la position de pivot et, éventuellement, toutes les lignes au-dessus d'elle. On applique les étapes 1 à 3 à la sous-matrice restante. On répète le processus jusqu'à ce qu'il ne reste plus aucune ligne non nulle à modifier.
5. On fait apparaître des 0 au-dessus de chaque pivot, en commençant par le pivot le plus à droite et en progressant vers le haut et vers la gauche. Si un pivot est différent de 1, on divise sa ligne par la valeur du pivot pour obtenir la valeur 1.

Exercice 2.17

Réduire la matrice A à une forme échelonnée réduite avec l'algorithme du pivot de Gauss. $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix}$.

Solution 2.17

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix}$
2. Ligne 2 = ligne 2 - ligne 1 : $A \sim \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix}$
3. Ligne 3 = ligne 3 - $\frac{3}{2}$ ligne 2 : $A \sim \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Ceci est la forme échelonnée de A . Pivots : 3, 2 et 1. Colonnes pivot : 1, 2 et 5.
4. La forme échelonnée réduite : ligne 2 = ligne 2 - 2 ligne 3. Ligne 1 = ligne 1 - 6 ligne 3. $A \sim \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Ligne 2 =

$$\frac{1}{2} \text{ ligne 2 : } A \sim \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}. \text{ Ligne 1} = \text{ligne 1} - 9$$

$$\text{ligne 2 : } A \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 & 9 & 0 & -72 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}. \text{ Ligne 1} = \frac{1}{3} \text{ ligne 1 : } A \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}. \text{ Ceci est la forme échelonnée réduite de } A.$$

3 Décomposition LU (hors série)

Exercice HS.1

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ -4 & -1 & -12 & 9 \\ -2 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

- 1) Donner la décomposition LU de la matrice A (i.e. $A = LU$ avec L triangulaire inférieure et U triangulaire supérieure).
- 2) Donner la décomposition LU de la matrice A en spécifiant les matrices $M_i, L_i : M_3 M_2 M_1 A = L_1 L_2 L_3 U$.
- 3) En déduire la solution du système linéaire $Ax = b$ où $b = (1.5 \quad 4 \quad -14 \quad -6.5)^T$.
- 4) Soit $B = U^T A L^T$. Sans calculs supplémentaires, donner une décomposition LU de la matrice B .

Solution HS.1

- 1) Vérifions tout d'abord que, $\forall k = 1, \dots, 4, \det(\Delta_k) \neq 0$:

(a) $\det(\Delta_1) = -2 \neq 0$.

(b) $\det(\Delta_2) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -2 \neq 0$.

(c) $\det(\Delta_3) = -2 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -12 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (1) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

(d) $\det(\Delta_4) = (-1) \cdot (1) \begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -6 & -13 & 13 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix}_{l_2 \leftarrow -l_2 + 3l_1} = -1 \cdot 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$.

Maintenant, obtenons la décomposition LU par la méthode du pivot de

Gauss.

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ -4 & -1 & -12 & 9 \\ -2 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & & 0 & 0 \\ -4 & & & 0 \\ -2 & & & 1 \end{pmatrix} \\
 &\sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -10 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & & 0 \\ -2 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \\
 &\sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = U, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} /(-2),/(-1)
 \end{aligned}$$

2) Détermination des M_i , L_i pour la décomposition LU : $M_3M_2M_1A =$

$L_1L_2L_3U$.

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ -4 & -1 & -12 & 9 \\ -2 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \rightarrow M_1A &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -10 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \\
 \rightarrow M_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \rightarrow M_2M_1A &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \\
 \rightarrow M_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\
 \rightarrow M_3M_2M_1A &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = U, \quad L_1L_2L_3 = L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

3) Résoudre $AX = b$: En résolvant successivement : $LUx = b$ comme suit :
 $L\tilde{x} = b, Ux = \tilde{x}$.

(a) $L\tilde{x} = b$:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 & = 1.5 \\ -\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 & = 4 \\ 2\tilde{x}_1 - 3\tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 & = -14 \\ \tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_3 + \tilde{x}_4 & = -6.5 \end{cases} \iff \begin{cases} \tilde{x}_1 & = 1.5 \\ \tilde{x}_2 & = 4 + \tilde{x}_1 = 5.5 \\ \tilde{x}_3 & = -14 - 3 + 16.5 = -0.5 \\ \tilde{x}_4 & = -6.5 - 1.5 - 1 = -9 \end{cases}$$

(b) $Ux = \tilde{x}$:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & = 1.5 \\ x_2 + 3x_3 - 2x_4 & = 5.5 \\ -x_3 + x_4 & = -0.5 \\ -3x_4 & = -9 \end{cases} \iff \begin{cases} x_4 & = 3 \\ x_3 & = 0.5 + x_4 = 3.5 \\ x_2 & = 5.5 + 2x_4 - 3x_3 = 1 \\ x_1 & = -\frac{1}{2}(1.5 - x_2 + x_3 - x_4) = -0.5 \end{cases}$$

- 4) $B = U^T(LU)L^T = (U^T L)(UL^T)$. U est triangulaire supérieure et L triangulaire inférieure donc U^T est triangulaire inférieure et L^T triangulaire supérieure. Ainsi, $U^T L$ est triangulaire inférieure et UL^T est triangulaire supérieure et on a bien $B = L'U'$ avec $L' = U^T L$ et $U' = UL^T$.

Exercice HS.2

- 1) Réaliser la décomposition LU de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 8 \\ -2 & 2 & -5 & -1 \\ 3 & 1 & 8 & 13 \end{pmatrix}$$

- 2) En déduire la solution du système linéaire $Ax = b$ avec $b = (0 \ 2 \ -1 \ 5)^T$.
 3) Sans calculer A^2 , résoudre le système linéaire $A^2x = b$.

Solution HS.2

- 1) Vérifions tout d'abord que, $\forall k = 1, \dots, 4, \det(\Delta_k) \neq 0$:

1) $\det(\Delta_1) = -1 \neq 0$.

2) $\det(\Delta_2) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$.

3) $\det(\Delta_3) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} =$
 $-(-11) - 1 - 3 \cdot 4 = -2 \neq 0$.

4)

$$\begin{aligned} \det(\Delta_4) = \det(A) &= -1 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 2 & -5 & -1 \\ 1 & 8 & 13 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & -1 \\ 3 & 8 & 13 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 8 \\ -2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 13 \end{vmatrix} \\ &= -[-5 \cdot 13 + 8 - 3 \cdot (2 \cdot 13 + 1)] + 8 \cdot (2 \cdot 8 + 5) \\ &\quad - [-5 \cdot 13 + 8 - 3 \cdot (-2 \cdot 13 + 3)] + 8(-2 \cdot 8 + 3 \cdot 5) \\ &\quad - 3[2 \cdot 13 + 1 - (-2 \cdot 13 + 3)] + 8 \cdot (-2 - 3 \cdot 2) \\ &= -(-57 - 81 + 168) - (-57 + 69 - 8) - 3(27 + 23 - 64) \\ &= -30 - 4 + 3 \cdot 14 = 8 \neq 0 \end{aligned}$$

Maintenant, obtenons la décomposition LU par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 8 \\ -2 & 2 & -5 & -1 \\ 3 & 1 & 8 & 13 \end{pmatrix}, & L &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & & 0 & 0 \\ -2 & & & 0 \\ 3 & & & 1 \end{pmatrix} \\
 &\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 13 \end{pmatrix}, & L &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & & 0 \\ 3 & 4 & & 1 \end{pmatrix} \\
 &\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}, & L &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = U, & L &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

2) Résolvons successivement les systèmes $L\tilde{x} = b$ et $Ux = \tilde{x}$:

1) $L\tilde{x} = b$:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 & = 0 \\ -\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 & = 2 \\ 2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_3 & = -1 \\ -3\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 - \tilde{x}_3 + \tilde{x}_4 & = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} \tilde{x}_1 & = 0 \\ \tilde{x}_2 & = 2 + \tilde{x}_1 = 2 \\ \tilde{x}_3 & = -1 - 2\tilde{x}_1 = -1 \\ \tilde{x}_4 & = 5 + 3\tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 = 5 - 4 - 1 = 0 \end{cases}$$

2) $Ux = \tilde{x}$:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 3x_3 & = 0 \\ 2x_2 + 8x_4 & = 2 \\ x_3 - x_4 & = -1 \\ -4x_4 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_4 & = 0 \\ x_3 & = -1 + x_4 = -1 \\ x_2 & = \frac{1}{2}(2 - 8x_4) = 1 \\ x_1 & = x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$$

3) $A^2x = b \Leftrightarrow A(Ax) = b$. La solution de $Ax = b$ est : $x = A^{-1}b = (4 \ 1 \ -1 \ 0)^T = b'$. Donc, résoudre $A^2x = b$ revient à résoudre $A^{-1}A^2x = A^{-1}b \Leftrightarrow Ax = b' = (4 \ 1 \ -1 \ 0)^T$. Résolvons ce système par la méthode utilisée dans la question (2) :

$$1) L\tilde{x} = (4 \ 1 \ -1 \ 0)^T :$$

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 & = 4 \\ -\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 & = 1 \\ 2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_3 & = -1 \\ -3\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 - \tilde{x}_3 + \tilde{x}_4 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \tilde{x}_1 & = 4 \\ \tilde{x}_2 & = 1 + \tilde{x}_1 = 1 + 4 = 5 \\ \tilde{x}_3 & = -1 - 2\tilde{x}_1 = -1 - 8 = -9 \\ \tilde{x}_4 & = 3\tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 = 12 - 10 - 9 = -7 \end{cases}$$

$$2) Ux = \tilde{x} :$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 3x_3 & = 4 \\ 2x_2 + 8x_4 & = 5 \\ x_3 - x_4 & = -9 \\ -4x_4 & = -7 \end{cases} \iff \begin{cases} x_4 & = \frac{7}{4} \\ x_3 & = -9 + x_4 = -\frac{29}{4} \\ x_2 & = \frac{1}{2}(5 - 8x_4) = -\frac{9}{2} \\ x_1 & = 4 + x_2 - 3x_3 = \frac{53}{4} \end{cases}$$

Exercice HS.3

$$\text{Soit la matrice } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

- 1) Donner la factorisation LU de A .
- 2) En déduire la solution du problème $Ax = b$ avec $b = (-3 \ 1 \ 5)^T$.

Solution HS.3

- 1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$ zero comme pivot \rightarrow interchanger les lignes 1 et 2 pour avoir un pivot = 1. \rightarrow passage par la matrice de permutation.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \rightarrow PA &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \rightarrow M_1 P_1 A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = I_2 \\ \rightarrow M_2 P_2 M_1 P_1 A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = U, \quad L = L_1 L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2) Résolution de $Ax = b$. On a réussi à faire la décomposition LU de $P^{(2)}P_{1 \leftrightarrow 2}^{(1)}A = P_2P_1A = I_2P_1A = P_1A$. Résoudre $Ax = b$ est équivalent à résoudre $P_1Ax = P_1b$.

Donc, on résout $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} x = (1 \quad -3 \quad 5)^T$.

$Ax = b \Leftrightarrow P_1Ax = P_1b \Leftrightarrow LUX = P_1b$. On résout ce système en deux phase :

1) $L\tilde{x} = P_1b$:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 & = 1 \\ \tilde{x}_2 & = -3 \\ -\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 & = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} \tilde{x}_1 & = 1 \\ \tilde{x}_2 & = -3 \\ \tilde{x}_3 & = 3 \end{cases}$$

2) $Ux = \tilde{x}$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 & = 1 \\ 2x_2 - 3x_3 & = -3 \\ x_3 & = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 & = -2 \\ x_2 & = 3 \\ x_3 & = 3 \end{cases}$$

4 Décomposition des matrices symétriques : LDM^T , LDL^T et Cholesky

Exercice HS.4

Trouver la décomposition en LDM^T de A , tel que : $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 9 & 15 & 42 \\ 12 & 54 & 194 \end{pmatrix}$.

Solution HS.4

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 9 & 15 & 42 \\ 12 & 54 & 194 \end{pmatrix}, \\
 &\rightarrow D_{1,1} = A_{1,1}, L_{2:3,1} = A_{2:3}/D_{1,1}, \\
 &\Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9/3 & 1 & 0 \\ 12/3 & l_{3,2} & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & D_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & D_{3,3} \end{pmatrix}, M^T = \begin{pmatrix} 1 & M_{1,2}^T & M_{1,3}^T \\ 0 & 1 & M_{2,3}^T \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{cases} L_{1:2,1:2} \times v_{1:2} = A_{1:2,2} \rightarrow v_{1:2} = (3 \ 6)^T \\ D_{2,2} = v_2 = 6 \\ M_{1,2}^T = v_1/D_{1,1} = 1 \\ L_{3,2} = (A_{3,2} - v_1 L_{3,1})/v_2 = 7 \end{cases} \\
 &\Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & D_{3,3} \end{pmatrix}, M^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & M_{1,3}^T \\ 0 & 1 & M_{2,3}^T \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{cases} L_{1:3,1:3} \times v_1 : 3 = A_{1:3,3} \rightarrow v_{1:3} = (6 \ 24 \ 2)^T \\ D_{3,3} = v_3 = 2 \\ M_{2,3}^T = v_{1:2} \cdot D_{1:2} = (2 \ 4)^T \end{cases} \\
 &\Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, M^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Exercice HS.5

Donner la factorisation LDL^T de la matrice symétrique A tel que : $A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 20 & 45 & 80 \\ 30 & 80 & 171 \end{pmatrix}$.

Solution HS.5

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 20 & 45 & 80 \\ 30 & 80 & 171 \end{pmatrix} \\
&\rightarrow D_{1,1} = A_{1,1} = 10, L_{2:3,1} = A_{2:3}/D_{1,1} \\
&\Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & l_{3,2} & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & D_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & D_{3,3} \end{pmatrix}, L^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & L_{2,3}^T \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{cases} L_{1:2,1:2} \times v_{1:2} = A_{1:2,2} \rightarrow v_{1:2} = (20 \ 5)^T \\ D_{2,2} = v_2 = 5 \\ L_{3,2} = (A_{3,2} - v_1 L_{3,1})/v_2 = 4 \end{cases} \\
&\Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & D_{3,3} \end{pmatrix}, L^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{cases} L_{1:3,1:3} \times v_{1:3} = A_{1:3,3} \rightarrow v_{1:3} = (30 \ 20 \ 1)^T \\ D_{3,3} = v_3 = 1 \end{cases} \\
&\Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Exercice HS.6

Donner la décomposition De Cholesky de la matrice symétrique définie positive

$$A, \text{ tel que : } A = \begin{pmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

Solution HS.6

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 11 \end{pmatrix} \\
\rightarrow \begin{cases} v_1(1:3) &= A_{1:3,1} = \begin{pmatrix} 25 & 15 & -5 \end{pmatrix}^T \\ G_{1:3,1} &= v_1(1:3)/\sqrt{v_1(1)} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}^T \end{cases} \\
\Rightarrow G_{1:3,1} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\
\rightarrow \begin{cases} v_2(2:3) &= A_{2:3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 18 & 0 \end{pmatrix}^T \\ v_2(2:3) &= v_2(2:3) - G_{2:3,1} \times G_{2,1}^T \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \times 3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \\ G_{2:3,2} &= v_2(2:3)/\sqrt{v_2(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}^T \end{cases} \\
\Rightarrow G_{1:3,1:2} &= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
\rightarrow \begin{cases} v_3(3:3) &= A_{3:3,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}^T \\ v_3(3:3) &= v_3(3:3) - G_{3,1:2} \times G_{3,1:2}^T \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \\ G_{3:3,3} &= v_3(3:3)/\sqrt{v_3(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T \end{cases} \\
\Rightarrow G_{1:3,1:2} &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

5 Les moindres carrés dans \mathbb{R} (régression simple)

Nous présentons dans cette section la notion de la régression simple (mono-variable) et comment trouver ses coefficients avec la méthode des moindres carrés (version scalaire et matricielle). Nous abordons au passage la minimisation (optimisation) d'un coût et le lien avec la résolution d'un système d'équations linéaires.

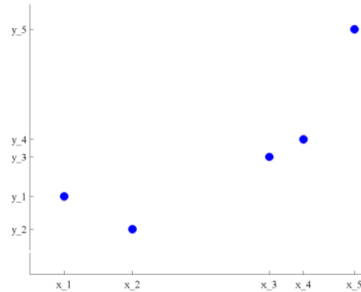
1. Version scalaire ¹

Le problème de la régression linéaire :

Dans une expérimentation, nous avons collecté n couples d'observations (x, y) tel que :

- x : la variable explicative qui représente la température.
- y : la variable à expliquer qui représente concentration en ozone.

Nous disposons de 5 échantillons qui sont présentés dans la figure Fig.2. Nous cherchons dans l'expérimentation à expliquer la concentration en



x	1	2	4	4,5	5,25
y	-1	-2	0,5	1	4

\mathbf{x}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
\mathbf{y}	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

FIGURE 2 – 5 Échantillons de l'expérimentation.

ozone en fonction de la température via une droite. Dans un sens, on cherche une droite qui représente "au mieux" la relation linéaire :

$$y = ax + b \quad (27)$$

tel que : $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Cours de S.Canu, La régression linéaire. STPI2, M8. 8 Avril 2014.

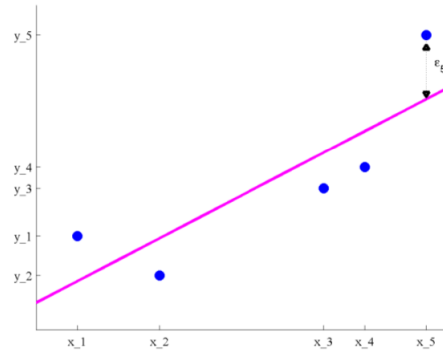


FIGURE 3 – Un exemple de droite.

Nous présentons un exemple de droite dans la figure 3. La difficulté pour déterminer cette droite est que les observations ne se trouvent pas exactement sur une droite. Il y a un bruit ε . Donc, on redéfinit l'équation de notre droite comme ceci :

$$y = ax + b + \varepsilon \quad (28)$$

$\varepsilon \in \mathbb{R}$. On appelle ε un bruit ou une erreur. Chaque observation i a sa propre erreur ε_i . Donc, on se retrouve avec le triple (a, b, ε) .

Le modèle linéaire :

Le modèle linéaire pose la relation suivante entre la variable explicative x et la variable à expliquer y avec les paramètres inconnus (a, b, ε) sous la forme :

$$y = ax + b + \varepsilon \quad (29)$$

avec $\mathbf{a} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, La moyenne du bruit : $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$. Variance du bruit : $\mathbb{E}(\varepsilon^2) = \sigma^2$. On peut dire que ce qu'on observe dans la réalité est l'effet du modèle mélangé avec un bruit :

$$\text{observation} = \text{modèle} + \text{bruit} \quad (30)$$

Notations :

- Variable explicative : $x \in \mathbb{R}^p$ (pour le moment $p = 1$).
- Variable à expliquer : $y \in \mathbb{R}$.
- Erreur (bruit) : ε .
- Paramètres scalaires du modèle : $a, b \in \mathbb{R}$.
- Paramètres vectoriels du modèles : $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$.

- Le modèle : $y = f(x, \mathbf{a}) + \varepsilon$.
- Les paramètres estimés du modèle : $\hat{\mathbf{a}}$.
- Prédiction : $\hat{y} = f(x, \hat{\mathbf{a}})$.
- Variable aléatoires : ε et donc y et donc $\hat{\mathbf{a}}$.

On écrit :

$$y = \underbrace{ax + b}_{f(x, \mathbf{a})} + \varepsilon \quad (31)$$

Le critère des moindres carrés :

Nous rappelons que nous cherchions une droite qui représente “au mieux” toutes les observations (i.e. la droite essaye de passer par toutes les observations). Une manière d’interpréter cet objectif est de dire qu’on cherche une droite qui a une distance “plus petite” par rapport à toutes les observations. Ceci peut être écrit comme suit :

$$\min_{a, b} J(a, b)$$

$$J(a, b) = \sum_{i=1}^n \underbrace{(y_i - ax_i - b)}_{\varepsilon_i}^2$$

n est le nombre total des observations (Fig.4).

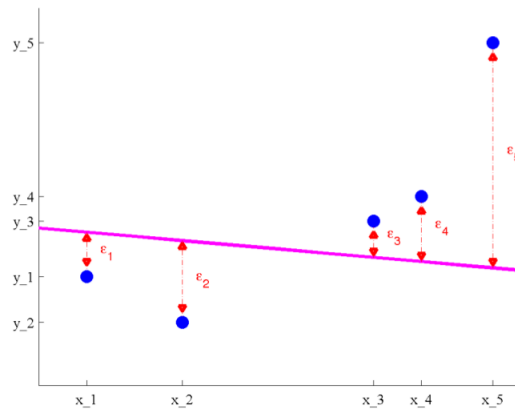


FIGURE 4 – Erreur du modèle (les résidus).

Le problème des moindres carrés : forme d’un système d’équations linéaires :

Les observation dont nous disposons peuvent aussi être vues comme un

système de n équations linéaires à $2 + n$ inconnues (a, b, ε) . Ce système s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} ax_1 + b + \varepsilon_1 & = y_1 \\ \dots & \\ ax_i + b + \varepsilon_i & = y_i \\ \dots & \\ ax_n + b + \varepsilon_n & = y_n \end{cases}$$

On cherche a, b qui minimise simultanément tous les $\varepsilon_i, i = 1, \dots, n$:

$$J(a, b) = \sum_{i=1}^n \underbrace{(y_i - ax_i - b)}_{\varepsilon_i}^2 \quad (32)$$

On appelle J le coût.

Résolution du problème des moindres carrés :

L'équation Eq.32 est sous une forme quadratique convexe. Donc, elle admet une unique solution $\mathbf{a} = (a, b)$ pour lequel Eq.32 soit minimale. La figure Fig.5,6 représentent un exemple d'une fonction quadratique convexe en 1D et 2D respectivement.

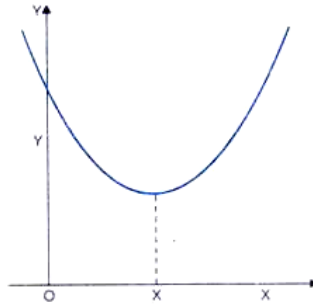


FIGURE 5 – Fonction quadratique convexe 1D (Abscisse : le paramètre du modèle. Ordonnés : valeur du coût (J)).

Dans la figure Fig.5, la solution (le paramètre en abscisse qui minimise le coût (ordonné)) a une caractéristique spécifique : c'est le point dont lequel la dérivée du coût s'annule (et aussi change de direction).

Dans le même sens, dans la figure Fig.6, la solution de Eq.32 (i.e. les paramètres $\hat{\mathbf{a}} = (\hat{a}, \hat{b})$ qui minimise le coût J de Eq.32) a la caractéristique qui est le point dont lequel la dérivée de J s'annule (et change de direction). Dans ce cas, on dit que $J(\hat{a}, \hat{b})$ est un minimum global.

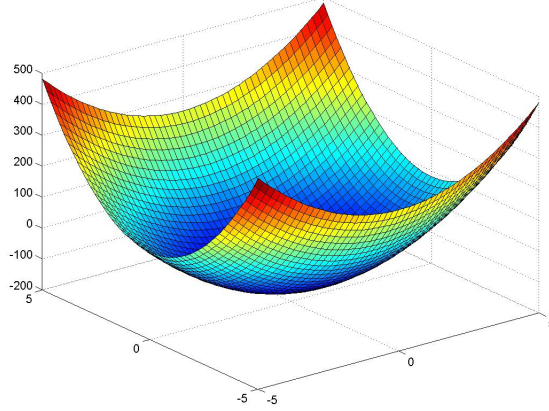


FIGURE 6 – Fonction quadratique convexe 2D (x : le paramètre a du modèle. y : le paramètre b du modèle. z : la valeur du coût (J)).

Calcul du gradient :

On pose :

$$\min_{a,b} J(a,b)$$

$$\text{tel que : } J(a,b) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2 \quad (33)$$

Pour résoudre Eq.33, on calcule le gradient (la dérivée) du coût J par rapport à chaque paramètre (variable) a, b comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial J(a,b)}{\partial a} = a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n y_i x_i \\ \frac{\partial J(a,b)}{\partial b} = a \sum_{i=1}^n x_i + bn - \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$$

On appliquant la condition d'optimalité sur les paramètres (i.e. la dérivé dans le point solution doit être égale à zéro), on trouve :

$$(\hat{a}, \hat{b}) \text{ est une solution du problème } \min_{a,b} J(a,b) \iff \begin{cases} \frac{\partial J(\hat{a}, \hat{b})}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial J(\hat{a}, \hat{b})}{\partial b} = 0 \end{cases} \quad (34)$$

La solution de Eq.34 est donnée par :

$$\hat{a} = \frac{n \sum_{i=1}^n y_i x_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}, \quad \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n -\hat{a} \sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

2. Version vectorielle²

Nous considérons la notation suivante :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_i \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}, \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

La norme L_2 d'un vecteur $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ est une valeur réel ($\in \mathbb{R}$) et définie comme suit (Eq.35) :

$$\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} \quad (35)$$

Donc, le carrée de L_2 est (Eq.36) :

$$\|v\|_2^2 = \sum_{i=1}^n v_i^2 \quad (36)$$

On pose : $\mathbf{z} = \mathbf{ax} + \mathbf{be}$. Donc, $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{y} - \underbrace{\mathbf{ax} + \mathbf{be}}_{\mathbf{z}}$.

Comme nous l'avons vu avant, un modèle est représenté par un paire de paramètre (a, b) tel que :

$$\begin{cases} y_1 &= ax_1 + b + \varepsilon_1 \\ \dots & \\ y_i &= ax_i + b + \varepsilon_i \\ \dots & \\ y_n &= ax_n + b + \varepsilon_n \end{cases} \quad (37)$$

tel que : $\mathbf{x}, \mathbf{e}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ sont vecteurs de \mathbb{R}^n . (Fig.7).

On pose : $X = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_i & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix}$ la matrice des observations (augmentée de 1).

2. Cours de S.Canu, La régression multiple. STPI2, M8. 28 Mars 2011.

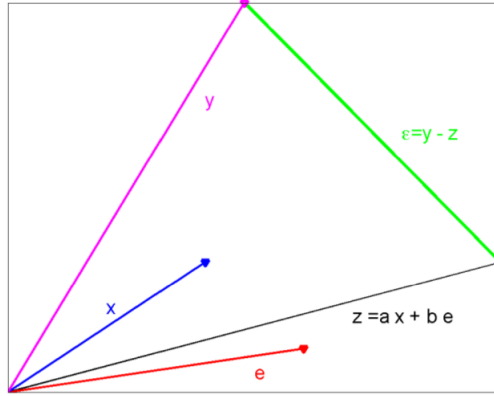


FIGURE 7 – Représentation vectorielle du modèle et des résidus.

$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ la variable à expliquer. $\alpha = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ le vecteur des inconnus (paramètre du modèle). La forme matricielle du système des équations linéaires Eq.37 est donnée sous la forme :

$$X\alpha + \varepsilon = \mathbf{y} \quad (38)$$

Version matricielle du coût :

Le problème des moindres carrés se réécrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 & \min_{\alpha} J(\alpha) \\
 \text{tel que : } & J(\alpha) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - X\alpha\|_2^2 \\
 & = \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \alpha^T X^T \mathbf{y} + \frac{1}{2} \alpha^T X^T X \alpha \quad (39)
 \end{aligned}$$

Nous posons le nombre des variables explicatives p . Dans le cas de la régression simple, $p = 1$. Donc, sa dérivées partielles s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 J(\alpha) &= \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \alpha^T X^T \mathbf{y} + \frac{1}{2} \alpha^T X^T X \alpha \\
 \frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha_i} &= 0 - w_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{p+1} (M_{ij} + M_{ji}) \alpha_j
 \end{aligned}$$

avec $\mathbf{w} = X^T \mathbf{y}$ et $M = X^T X$. Au final, la gradient du coût est (Eq.40) :

$$\nabla J(\hat{\alpha}) = -\mathbf{w} + M\alpha = -X^T \mathbf{y} + X^T X \hat{\alpha} \quad (40)$$

La minimisation du coût :

La minimisation du coût $J(\alpha)$ est réalisée lorsque le gradient du coût s'annule (Eq.41) :

$$\nabla J(\hat{\alpha}) = 0 \iff -X^T \mathbf{y} + X^T X \hat{\alpha} = 0 \quad (41)$$

Dans le cas de la régression simple, on pose : $X^T \mathbf{y} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$,

$X^T X = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$. On obtient la formulation (Eq.42) :

$$-\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

Qui est un système d'équation linéaires à deux inconnus : (\hat{a}, \hat{b}) .

Lien entre : moindres carrés, système d'équations linéaires, résolution de $Ax = b$, factorisation matricielle :

Nous avons vu que la résolution du problème des moindres carrés (Eq.39) revient à résoudre le système d'équations linéaires suivant (Eq.43) :

$$X^T X \hat{\alpha} = X^T \mathbf{y} \quad (43)$$

Le système d'équations linéaires Eq.43 peut s'écrire sous la forme $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\underbrace{X^T X}_A \underbrace{\hat{\alpha}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{X^T \mathbf{y}}_{\mathbf{b}} \quad (44)$$

Donc, la résolution d'un problème des moindres carrés revient à résoudre un système d'équations linéaires de la forme $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Pour cela, différentes approches sont possibles :

- Méthode directe : inverse d'une matrice. $\hat{\alpha} = (X^T X)^{-1} X^T \mathbf{y}$
- Factorisation matricielle : LU , Cholesky.
- Factorisation QR (plus en détails plus tard) :
 - (a) $X = QR$, Q matrice orthogonale et R une matrice triangulaire supérieure.
 - (b) $(R^T Q^T QR) \hat{\alpha} = R^T Q^T \mathbf{y}$.
 - (c) $R \hat{\alpha} = Q^T \mathbf{y}$.

Comment faire lorsqu'on est en face de plusieurs variables explicatives (multi-dimensionnel) ? [TODO]

6 Factorisation QR : Méthode de Householder

Exercice HS.7

Donner une décomposition QR de A en utilisant la méthode de Householder :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 20 & 35 & 5 \\ -4 & -30 & -15 & 55 \\ -8 & 40 & -80 & -65 \\ 23 & -15 & 30 & 15 \end{pmatrix}.$$

Solution HS.7

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 20 & 35 & 5 \\ -4 & -30 & -15 & 55 \\ -8 & 40 & -80 & -65 \\ 23 & -15 & 30 & 15 \end{pmatrix}$$

1. Traitement de la première colonne :

Le premier vecteur colonne de A est $u_1 = [-4, -4, -8, 23]^T$. La norme de ce vecteur est : $\|u_1\| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 8^2 + 23^2} = 25$. On va transformer le vecteur u_1 en le vecteur $v_1 = [25 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ au moyen de la réflexion h_1 par rapport à l'hyperplan orthogonal au vecteur $a_1 = u_1 - \|u_1\|e_1 = [-29 \ -4 \ -8 \ 23]^T$. Le carré de la norme de a_1 est : $\|a_1\|^2 = 2 \cdot 725$. La matrice de Householder associée est :

$$\begin{aligned} H_1 &= I_n - \frac{2}{\|a_1\|^2} a_1 a_1^T = I_n - \frac{1}{725} \begin{bmatrix} -29 \\ -4 \\ -8 \\ 23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -29 & -4 & -8 & 23 \end{bmatrix} \\ &= I_n - \frac{1}{725} \begin{pmatrix} 841 & 116 & 232 & -667 \\ 116 & 16 & 32 & -92 \\ 232 & 32 & 64 & -184 \\ -667 & -92 & -184 & 529 \end{pmatrix} = \frac{1}{725} \begin{pmatrix} -116 & -116 & -232 & 667 \\ -116 & 709 & -32 & 92 \\ -232 & -32 & 661 & 184 \\ 667 & 92 & 184 & \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} A_1 &= H_1 A = \frac{1}{725} \begin{pmatrix} -116 & -116 & -232 & 667 \\ -116 & 709 & -32 & 92 \\ -232 & -32 & 661 & 184 \\ 667 & 92 & 184 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 20 & 35 & 5 \\ -4 & -30 & -15 & 55 \\ -8 & 40 & -80 & -65 \\ 23 & -15 & 30 & 15 \end{pmatrix} \\ &= \frac{25}{29} \begin{pmatrix} 29 & -29 & 58 & 29 \\ 0 & -42 & -15 & 167 \\ 0 & 32 & -88 & -69 \\ 0 & 24 & 21 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Traitement de la deuxième colonne :

Le deuxième vecteur colonne de A_1 est $u_2 = \frac{25}{29} [-29 \ -42 \ 32 \ 24]^T$.

Posons : $w = \frac{25}{29} [0 \ -42 \ 32 \ 24]^T$. La norme de ce vecteur est : $\|w\| = \frac{25}{29} \sqrt{42^2 + 32^2 + 24^2} = 50$.

On sait qu'on doit appliquer la réflexion h_2 par rapport à l'hyperplan orthogonal à $w - \|w\|e_2 = \frac{100}{29} [0 \ -25 \ 8 \ 6]^T$ qui est la même réflexion par rapport au vecteur $a_2 = [0 \ -25 \ 8 \ 6]^T$.

Le carré de la norme de a_2 est : $\|a_2\|^2 = 725$.

La matrice de Householder associée est :

$$\begin{aligned} H_2 &= I_n - \frac{2}{\|a_2\|^2} a_2 a_2^T = I_n - \frac{2}{725} \begin{bmatrix} 0 \\ -25 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix} [0 \ -25 \ 8 \ 6]^T \\ &= I_n - \frac{2}{725} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 625 & -200 & -150 \\ 0 & -200 & 64 & 48 \\ 0 & -150 & 48 & 36 \end{pmatrix} = \frac{1}{725} \begin{pmatrix} 725 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -525 & 400 & 300 \\ 0 & 400 & 597 & -96 \\ 0 & 300 & -96 & 653 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On en déduit la matrice $A_2 = H_2 A_1 = H_2 H_1 A$:

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{725} \begin{pmatrix} 725 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -525 & 400 & 300 \\ 0 & 400 & 597 & -96 \\ 0 & 300 & -96 & 653 \end{pmatrix} \frac{25}{29} \begin{pmatrix} 29 & -29 & 58 & 29 \\ 0 & -42 & -15 & 167 \\ 0 & 32 & -88 & -69 \\ 0 & 24 & 21 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 25 & -25 & 50 & 25 \\ 0 & 50 & -25 & -75 \\ 0 & 0 & -72 & -17 \\ 0 & 0 & 21 & 31 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On trouve alors la matrice $H_1 H_2$:

$$\begin{aligned} H_1 H_2 &= \frac{1}{725} \begin{pmatrix} -116 & -116 & -232 & 667 \\ -116 & 709 & -32 & 92 \\ -232 & -32 & 661 & 184 \\ 667 & 92 & 184 & \end{pmatrix} \frac{1}{725} \begin{pmatrix} 725 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -525 & 400 & 300 \\ 0 & 400 & 597 & -96 \\ 0 & 300 & -96 & 653 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{625} \begin{pmatrix} -100 & 200 & -296 & 503 \\ -100 & -425 & 304 & 328 \\ -200 & 400 & 433 & 56 \\ 575 & 100 & 152 & 164 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. Traitement de la troisième colonne :

Le troisième vecteur colonne de A_2 est $u_3 = [50 \ -25 \ -72 \ 21]^T$.

Posons $w = [0 \ 0 \ -72 \ 21]^T$. La norme de ce vecteur est $\|w\| = \sqrt{72^2 + 21^2} = 75$. On doit appliquer la réflexion h_3 par rapport à l'hyperplan orthogonal à $a_3 = w - \|w\|e_3 = [0 \ 0 \ -147 \ 21]^T$. Le carré de la norme de a_3 est : $\|a_3\|^2 = 174^2 + 21^2 = 22050$.

La matrice de Householder associée est :

$$\begin{aligned} H_3 &= I_n - \frac{2}{\|a_3\|^2} a_3 a_3^T = I_n - \frac{1}{11025} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -147 \\ 21 \end{bmatrix} [0 \ 0 \ -147 \ 21] \\ &= I_n - \frac{1}{11025} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 21609 & -3087 \\ 0 & 0 & -3087 & 441 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 24 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On en déduit la matrice $R = A_3 = H_3 A_2 = H_3 H_2 H_1 A$:

$$R = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 & -25 & 50 & 25 \\ 0 & 50 & -25 & -75 \\ 0 & 0 & -72 & -17 \\ 0 & 0 & 21 & 31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & -25 & 50 & 25 \\ 0 & 50 & -25 & -75 \\ 0 & 0 & 75 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}.$$

Enfin, voici $Q = H_1 H_2 H_3$:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{625} \begin{pmatrix} -100 & 200 & -296 & 503 \\ -100 & -425 & 304 & 328 \\ -200 & 400 & 433 & 56 \\ 575 & 100 & 152 & 164 \end{pmatrix} \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 24 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -4 & 8 & 17 & 16 \\ -4 & -17 & -8 & 16 \\ -8 & 16 & -16 & 7 \\ 23 & 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La décomposition QR de A est terminée :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -4 & 20 & 35 & 5 \\ -4 & -30 & -15 & 55 \\ -8 & 40 & -80 & -65 \\ 23 & -15 & 30 & 15 \end{pmatrix}}_A = \frac{1}{25} \underbrace{\begin{pmatrix} -4 & 8 & 17 & 16 \\ -4 & -17 & -8 & 16 \\ -8 & 16 & -16 & 7 \\ 23 & 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}}_{Q \text{ orthogonale}} \underbrace{\begin{pmatrix} 25 & -25 & 50 & 25 \\ 0 & 50 & -25 & -75 \\ 0 & 0 & 75 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}}_{R \text{ triangulaire}}.$$

Exercice HS.8

Donner les deux premières itérations (traitement de la 1ère et 2ème colonnes) de la décomposition QR de la matrice A en utilisant la méthode de Householder :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution HS.8

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Traitement de la première colonne :

Le premier vecteur de A est $u_1 = [1 \ -1 \ 1 \ -1]^T$. La norme de ce vecteur est : $\|u_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = 2$. On va transformer le vecteur u_1 en le vecteur $v_1 = [2 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ au moyen de la réflexion h_1 par rapport à l'hyperplan orthogonal au vecteur $a_1 = u_1 - \|u_1\|e_1 = [-1 \ -1 \ 1 \ -1]$. Le carré de la norme de a_1 est : $\|a_1\|^2 = 2 \cdot 2$.

La matrice de Householder associée est :

$$\begin{aligned} H_1 &= I_n - \frac{2}{\|a_1\|^2} a_1 a_1^T = I_n - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= I_n - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} A_1 = H_1 A &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Traitement de la deuxième colonne :

Le deuxième vecteur colonne de A_1 est $u_2 = \frac{1}{2} [-1 \ -1 \ 5 \ 1]^T$.

Posons : $w = \frac{1}{2} [0 \ -1 \ 5 \ 1]^T$. La norme de ce vecteur est : $\|w\| = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + 5^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{27}}{2}$.

On sait qu'on doit appliquer la réflexion h_2 par rapport à l'hyperplan orthogonal à $w - \|w\|e_2 = \frac{1}{2} [0 \ -1 - \sqrt{27} \ 5 \ 1]^T$ qui a la même réflexion par rapport au vecteur : $a_2 = [0 \ -1 - \sqrt{27} \ 5 \ 1]^T$.

Le carré de la norme de a_2 est : $\|a_2\|^2 = 2 \cdot (27 + \sqrt{27})$.

La matrice de Householder associée est :

$$\begin{aligned} H_2 &= I_n - \frac{2}{\|a_2\|^2} a_2 a_2^T = I_n - \frac{1}{27 + \sqrt{27}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 - \sqrt{27} \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} [0 \ -1 - \sqrt{27} \ 5 \ 1] \\ &= I_n - \frac{1}{27 + \sqrt{27}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 28 + 2\sqrt{27} & -5 - 5\sqrt{27} & -1 - \sqrt{27} \\ 0 & -5 - 5\sqrt{27} & 25 & 5 \\ 0 & -1 - \sqrt{27} & 5 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{27 + \sqrt{27}} \begin{pmatrix} 27 + \sqrt{27} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 - \sqrt{27} & 5 + 5\sqrt{27} & 1 + \sqrt{27} \\ 0 & 5 + 5\sqrt{27} & 2 + \sqrt{27} & -5 \\ 0 & 1 + \sqrt{27} & -5 & 26 + \sqrt{27} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On en déduit la matrice $A_2 = H_2 A_1 = H_2 H_1 A$:

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{27 + \sqrt{27}} \begin{pmatrix} 27 + \sqrt{27} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 - \sqrt{27} & 5 + 5\sqrt{27} & 1 + \sqrt{27} \\ 0 & 5 + 5\sqrt{27} & 2 + \sqrt{27} & -5 \\ 0 & 1 + \sqrt{27} & -5 & 26 + \sqrt{27} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2(27 + \sqrt{27})} \begin{pmatrix} 108 + 4\sqrt{27} & -27 - \sqrt{27} & 0 \\ 0 & 27 + 27\sqrt{27} & 28 + 28\sqrt{27} \\ 0 & 0 & 22 + 26\sqrt{27} \\ 0 & 0 & 24 + 6\sqrt{27} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On trouve alors la matrice H_1H_2 :

$$\begin{aligned}
 H_1H_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{27 + \sqrt{27}} \begin{pmatrix} 27 + \sqrt{27} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 - \sqrt{27} & 5 + 5\sqrt{27} & 1 + \sqrt{27} \\ 0 & 5 + 5\sqrt{27} & 2 + \sqrt{27} & -5 \\ 0 & 1 + \sqrt{27} & -5 & 26 + \sqrt{27} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2(27 + \sqrt{27})} \begin{pmatrix} 27 + \sqrt{27} & 5 + 5\sqrt{27} & 2 - 4\sqrt{27} & 32 - 2\sqrt{27} \\ 27 - \sqrt{27} & 3 + 3\sqrt{27} & 12 + 17\sqrt{27} & -30 \\ 27 + \sqrt{27} & 5 + 5\sqrt{27} & 2 + 6\sqrt{27} & 22 + 2\sqrt{27} \\ -27 - \sqrt{27} & 7 + 7\sqrt{27} & -8 - 4\sqrt{27} & 20 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

7 Méthodes itératives pour la résolution d'un système linéaire

7.1 Normes des vecteurs/matrices

Exercice HS.9

Trouver la norme l_∞ et l_2 des vecteurs suivants :

- a) $x = [3, -4, 0, \frac{3}{2}]^T$
- b) $x = [2, 1, -3, 4]^T$
- c) $x = [\sin k, \cos k, 2^k]^T$, pour un k entier positif fixe.
- d) $x = [\frac{4}{k+1}, \frac{2}{k^2}, k^2 e^{-k}]^T$, pour un k entier positif fixe.

Solution HS.9

Rappelant que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$: $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

- a) $x = [3, -4, 0, \frac{3}{2}]^T \rightarrow \|x\|_\infty = 4, \|x\|_2 = \frac{\sqrt{109}}{2}$
- b) $x = [2, 1, -3, 4]^T \rightarrow \|x\|_\infty = 4, \|x\|_2 = \sqrt{30}$
- c) $x = [\sin k, \cos k, 2^k]^T \rightarrow \|x\|_\infty = 2^k, \|x\|_2 = \left(1 + 4^k \right)^{\frac{1}{2}}$, pour un k entier positif fixe.
- d) $x = [\frac{4}{k+1}, \frac{2}{k^2}, k^2 e^{-k}]^T \rightarrow \|x\|_\infty = \frac{4}{k+1}, \|x\|_2 = \left(\frac{16}{(k+1)^2} + \frac{4}{k^4} + k^4 e^{-2k} \right)^{\frac{1}{2}}$, pour un k entier positif fixe.

Exercice HS.10

- a) Vérifier que la fonction $\|\cdot\|_1$ définie sur \mathbb{R}^n comme suit :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

est une norme dans \mathbb{R}^n .

- b) Trouver $\|x\|_1$ des vecteurs donnés dans l'exercice HS.9.
- c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_1 \geq \|x\|_2$.

Solution HS.10

a) Pour que $\|x\|_1$ soit une norme dans \mathbb{R}^n , il faut que :

(a) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \geq 0$. (vérifiée)

(b) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| = 0 \Leftrightarrow x_i = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$. (vérifiée)

(c) $\|\alpha x\|_1 = \sum_{i=1}^n |\alpha x_i| = \sum_{i=1}^n |\alpha| |x_i| = |\alpha| \sum_{i=1}^n |x_i| = |\alpha| \|x\|_1$.
(vérifiée)

(d) $\|x + y\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|) = \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$. (vérifiée)

b) a) $x = [3, -4, 0, \frac{3}{2}]^T \rightarrow \|x\|_1 = \frac{17}{2}$

b) $x = [2, 1, -3, 4]^T \rightarrow \|x\|_1 = 10$

c) $x = [\sin k, \cos k, 2^k]^T \rightarrow \|x\|_1 = |\sin k| + |\cos k| + e^k$, pour un k entier positif fixe.

d) $x = [\frac{4}{k+1}, \frac{2}{k^2}, k^2 e^{-k}]^T \rightarrow \|x\|_1 = \frac{4}{k+1} + \frac{2}{k^2} + k^2 e^{-k}$, pour un k entier positif fixe.

c)

$$\|x\|_1^2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right)^2 = (|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|)^2 \geq |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = \|x\|_2^2.$$

Par conséquent : $\|x\|_1 \geq \|x\|_2$.

Exercice HS.11

Montrer que les séquences suivantes convergent par rapport à la norme l_∞ et trouver leur limite :

a) $x^{(k)} = [1/k, e^{1-k}, -2/k^2]^T$

b) $x^{(k)} = [e^{-k} \cos k, k \sin(1/k), 3 + k^{-2}]^T$

c) $x^{(k)} = [k e^{-k^2}, \cos(k)/k, \sqrt{k^2 + k} - k]^T$

d) $x^{(k)} = [e^{1/k}, (k^2 + 1)/(1 - k^2), (1/k^2)(1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1))]^T$

Solution HS.11

La séquence des vecteurs $\{x^{(k)}\}$ converge à un x de \mathbb{R}^n par rapport à la norme l_∞ si et seulement si $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i$ pour $i = 1, \dots, n$.

a) $x^{(k)} = [1/k, e^{1-k}, -2/k^2]^T \rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} = [0, 0, 0]^T$.

b) $x^{(k)} = [e^{-k} \cos k, k \sin(1/k), 3 + k^{-2}]^T \rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} = [0, 1, 3]^T$ (rap. : $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x)/x = 1$)

- c) $x^{(k)} = [ke^{-k^2}, \cos(k)/k, \sqrt{k^2+k}-k]^T \rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} = [0, 0, 1/2]^T$ (indice : $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{k^2+k}-k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{k^2+k}-k)(\sqrt{k^2+k}+k)}{\sqrt{k^2+k}+k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\sqrt{k^2+k}+k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k(\sqrt{1+1/k}+1)} = 1/2$)
- d) $x^{(k)} = [e^{1/k}, (k^2+1)/(1-k^2), (1/k^2)(1+3+5+\dots+(2k-1))]^T \rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} = [0, -1, 1]^T$ (indice : $1+3+5+\dots+(2k-1) = k(2k)/2 = k^2$)

Exercice HS.12

Calculer la norme l_∞ des matrices suivantes :

- a) $A = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- b) $A = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 15 & 1 \end{bmatrix}$
- c) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$
- d) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 7 \\ -1 & 4 & 0 \\ -7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Solution HS.12

Rappelant que pour A une matrice $n \times n$: $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.

- a) $A = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \|A\|_\infty = 25$
- b) $A = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 15 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \|A\|_\infty = 16$
- c) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \|A\|_\infty = 4$
- d) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 7 \\ -1 & 4 & 0 \\ -7 & 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \|A\|_\infty = 12$

Exercice HS.13

Les systèmes linéaires suivante $Ax = b$ ont x comme solution et \tilde{x} comme une solution approximative. Calculer : $\|x - \tilde{x}\|_\infty$ et $\|A\tilde{x} - b\|_\infty$:

- a)
- $$\begin{cases} 1/2x_1 + 1/3x_2 = 1/63 \\ 1/3x_1 + 1/4x_2 = 1/168 \end{cases}$$

$$x = [1/7 \quad -1/6]^T, \tilde{x} = x = [0.142 \quad -0.166]^T$$

b)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 & = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 & = 2 \end{cases}$$

$$x = [0 \quad -7 \quad 5]^T, \tilde{x} = x = [-0.33 \quad -7.9 \quad 5.8]^T$$

c)

$$\begin{cases} 0.04x_1 + 0.01x_2 - 0.01x_3 & = 0.06 \\ 0.2x_1 + 0.5x_2 - 0.2x_3 & = 0.3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = 11 \end{cases}$$

$$x = [1.827586 \quad 0.6551724 \quad 1.965517]^T, \tilde{x} = x = [1.8 \quad 0.64 \quad 1.9]^T$$

Solution HS.14

a)

$$\begin{cases} 1/2x_1 + 1/3x_2 & = 1/63 \\ 1/3x_1 + 1/4x_2 & = 1/168 \end{cases}$$

$$x = [1/7 \quad -1/6]^T, \tilde{x} = x = [0.142 \quad -0.166]^T \\ \rightarrow \|x - \tilde{x}\|_\infty = 8.57 \times 10^{-4}, \|A\tilde{x} - b\|_\infty = 2.06 \times 10^{-4}$$

b)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 & = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 & = 2 \end{cases}$$

$$x = [0 \quad -7 \quad 5]^T, \tilde{x} = x = [-0.33 \quad -7.9 \quad 5.8]^T \\ \rightarrow \|x - \tilde{x}\|_\infty = 0.90, \|A\tilde{x} - b\|_\infty = 0.27$$

c)

$$\begin{cases} 0.04x_1 + 0.01x_2 - 0.01x_3 & = 0.06 \\ 0.2x_1 + 0.5x_2 - 0.2x_3 & = 0.3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = 11 \end{cases}$$

$$x = [1.827586 \quad 0.6551724 \quad 1.965517]^T, \tilde{x} = x = [1.8 \quad 0.64 \quad 1.9]^T \\ \rightarrow \|x - \tilde{x}\|_\infty = 6.55 \times 10^{-2}, \|A\tilde{x} - b\|_\infty = 0.32$$

Exercice HS.15

Calculer la norme $\|\cdot\|_1$ des matrices données dans l'exercice HS.12 tel que :

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

Solution HS.15

- a) $A = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \|A\|_1 = 16$
- b) $A = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 15 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \|A\|_1 = 25$
- c) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \|A\|_1 = 4$
- d) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 7 \\ -1 & 4 & 0 \\ -7 & 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \|A\|_1 = 12$

Exercice HS.16

Montre par un exemple que la fonction $\|A\|_{\boxplus} = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$ ne définit pas une norme de matrice.

Solution HS.17

Rappelant que pour une fonction $\|\cdot\|$ définie une norme pour toutes matrice A, B de $n \times n$, $\|\cdot\|$ doit satisfaire :

- a) $\|A\| \geq 0$.
- b) $\|A\| = 0$ si et seulement si A est la matrice nulle (toutes entrée est égale à 0).
- c) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$.
- d) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.
- e) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

Pour $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ on trouve : $\|AB\|_{\boxplus} = 2, \|A\|_{\boxplus} \cdot \|B\|_{\boxplus} = 1$.

Exercice HS.18

Soit le théorème suivant :

Pour chaque $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ et $y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n]^T$ dans \mathbb{R}^n alors :

$$x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{i=1}^n y_i^2 \right\}^{1/2} = \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 .$$

Soit le théorème : pour $p > 1$:

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p} .$$

La norme de Frobenius est définie pour une matrice $n \times n$ tel que :

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} .$$

- a) Montre que $\|\cdot\|_F$ est une norme de matrice. (utiliser les théorèmes en dessus. Pour montrer : $\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$ travailler plutôt sur $\|AB\|_F^2$).
- b) Calculer $\|\cdot\|_F$ des matrices suivantes :

a) $A = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 15 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 7 \\ -1 & 4 & 0 \\ -7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Solution HS.18

- a) Montrer $\|\cdot\|_F$ est une norme.
- a) $\|A\|_F \geq 0$. (vérifiée)
- b) $\|A\|_F = 0$ si et seulement si A est la matrice nulle (toutes entrée est égale à 0). (vérifiée)
- c) $\|\alpha A\|_F = |\alpha| \|A\|_F$. (vérifiée)
- d) $\|A + B\|_F \leq \|A\|_F + \|B\|_F$. (vérifiée, via théorème 2)
- e) $\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$?

$$\begin{aligned} \|AB\|_F^2 &= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right|^2 \right) \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \sum_{k=1}^n |b_{kj}|^2 \right) \right) \text{ (via théorème 1)} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \left[|a_{ik}|^2 \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |b_{kj}|^2 \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \|B\|_F^2 \\ &= \|B\|_F^2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \\ &= \|B\|_F^2 \|A\|_F^2 = \|A\|_F^2 \|B\|_F^2. \end{aligned}$$

b) a) $A = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \|A\|_F = \sqrt{326}$

$$\text{b) } A = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 15 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \|A\|_F = \sqrt{326}$$

$$\text{c) } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \|A\|_F = 4$$

$$\text{d) } A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 7 \\ -1 & 4 & 0 \\ -7 & 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \|A\|_F = \sqrt{148}$$

7.2 Méthode itératives : Jacobi, Gauss-Seidel

Exercice HS.19

Trouves les deux itérations de la méthode Jacobi et Gauss-Seidel du système suivant en utilisant $x^0 = 0$:

$$\begin{aligned}3x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\3x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 0 \\3x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 4\end{aligned}$$

Solution HS.19

Jacobi :

$$\begin{aligned}x_1^{k+1} &= \frac{1 + x_2^k - x_3^k}{3} \\x_2^{k+1} &= \frac{-3x_1^k - 2x_3^k}{6} \\x_3^{k+1} &= \frac{4 - 3x_1^k - 3x_2^k}{7}\end{aligned}$$

$$x^1 = [0.33333 \quad 0 \quad 0.57142]^T, x^2 = [0.14286 \quad -0.35714 \quad 0.42857]^T$$

Gauss-Seidel :

$$\begin{aligned}x_1^{k+1} &= \frac{1 + x_2^k - x_3^k}{3} \\x_2^{k+1} &= \frac{-3x_1^{k+1} - 2x_3^k}{6} \\x_3^{k+1} &= \frac{4 - 3x_1^{k+1} - 3x_2^{k+1}}{7}\end{aligned}$$

$$x^1 = [0.33333 \quad -0.16666 \quad 0.50000]^T, x^2 = [0.11111 \quad -0.22222 \quad 0.61904]^T$$

Exercice HS.20

Le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 7 \\x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5\end{aligned}$$

a comme solution : $[1 \quad 2 \quad -1]^T$.

1. Montrer que : $\rho(T_j) = 0$. (sachant que : $x^k = T_j x^{k-1} + c_j$ pour la méthode de Jacobi).
2. Calculer $\rho(T_g) = 2$. (sachant que : $x^k = T_g x^{k-1} + c_j$ pour la méthode de Gauss-Seidel).

3. Sachant $\rho(T_j)$ et $\rho(T_g)$, quelle méthode itérative choisir pour résoudre le système linéaire ?
4. La méthode de Jacobi et Gauss-Seidel ont donné respectivement les deux solutions : $x^{23} = [1.00 \ 1.99 \ -1.00]^T$, $x^{25} = [-20.82 \ 2.00 \ -22.82]^T$. Qu'es ce qu'on peut dire sur les deux méthodes ?

Solution HS.20

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$D - L - U$$

$$1. T_j = D^{-1}(L + U) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\det(\lambda I_3 - T_j) = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \lambda^3.$$

$$\rho(T_j) = \max |\lambda| = 0.$$

$$2. T_g = (D - L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. ((D - L)^{-1} \text{ peut se calculer à la main.})$$

$$\det(\lambda I_3 - T_g) = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2)^2. \rho(T_g) = 2.$$

3. La méthode de Jacobi. ($\|x^k - x\| \approx \rho(T)^K \|x^0 - x\|$ sachant que $\rho(T) \leq \|T\|$ pour chaque norme naturelle $\|\cdot\|$. $\|x^k - x\| \approx \|T\|^K \|x^0 - x\|$)
4. La méthode de Gauss-Seidel a échoué à donner une bonne approximation.

Exercice HS.21

Le système linéaire :

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 &= -5 \end{aligned}$$

a comme solution : $[1 \ 2 \ -1]^T$.

1. Montrer que : $\rho(T_j) = \sqrt{5}/2$.
2. Montrer que : $\rho(T_g) = 1/2$.
3. Quelle méthode choisir pour résoudre le système ?

Solution HS.21

1. $T_j = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$. $\det(\lambda I_3 - T_j) = \lambda(\lambda^2 + 5/4)$. Les

valeurs propres sont : $0, \pm \frac{\sqrt{5}}{2}i$. $\rho(T_j) = \sqrt{5}/2 > 1$.

2. $T_g = (D-L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$.

$$\det(\lambda I - T_g) = \begin{vmatrix} \lambda & -1/2 & 1/2 \\ 0 & \lambda + 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & \lambda + 1/2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 1/2)^2. \rho(T_g) = 1/2.$$

3. $\rho(T_g) < \rho(T_j)$: On choisit la méthode de Gauss-Seidel.

Exercice HS.22

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1 & -1/4 \\ 1 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Es ce que la matrice A est à diagonale strictement dominante ?
2. Calculer $\rho(T_g)$ et $\rho(T_j)$. Sachant que les racines approximatifs de : $x^3 + 7/8x - 1/4$ sont : $x \approx 0.26455, x \approx -0.13228 \pm 0.96306i$.
Quelle conclusion ?
3. Qu'es ce qui se passe (par rapport à la convergence des deux méthodes) lorsqu'on effectue le changement suivant :

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_3 &= 0.2 \\ -1/2x_1 + x_2 - 1/4x_3 &= -1.425 \\ x_1 - 1/2x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

sachant que les racines approximatifs de : $x^3 + \frac{15}{8}x - 1/2$ sont : $x \approx 0.25755, x \approx -0.12878 \pm 1.38735i$.

Solution HS.22

1. A n'est à diagonale strictement dominante.
2. Jacobi :

$$T_j = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/4 \\ -1 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}. \det(\lambda I_3 - T_j) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -1/2 & \lambda & -1/4 \\ 1 & -1/2 & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$\lambda^3 + \frac{7}{8}\lambda - 1/4. \rho(T_j) = 0.9721021.$$

Gauss-Seidel :

$$T_g = (D - L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -3/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & -5/8 \end{bmatrix}.$$

$$\det(\lambda I - T_g) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & -3/4 \\ 0 & 0 & \lambda + 5/8 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda + 5/8). \quad \rho(T_g) = 5/8 = 0.625.$$

3. Les deux méthodes convergent.

$$4. A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1/2 & 1 & -1/4 \\ 1 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Jacobi : } T_j = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1/2 & 0 & 1/4 \\ -1 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}. \quad \det(\lambda I - T_j) = \lambda^3 + \frac{15}{8}\lambda -$$

$$1/2. \quad \rho(T_j) = 1.3933141.$$

Gauss-Seidel :

$$T_g = (D - L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -3/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5/4 \\ 0 & 0 & -11/8 \end{bmatrix}.$$

$$\det(\lambda I - T_g) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -2 \\ 0 & \lambda & -5/4 \\ 0 & 0 & \lambda + 11/8 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda + 11/8). \quad \rho(T_g) = 11/8 = 1.375$$

5. $\rho(T_j) > 1, \rho(T_g) > 1$: Les deux méthodes ne convergent pas.

8 Valeurs et vecteurs propres

Bonne nouvelle année.

Exercice HS.23

Déterminer les valeurs/les vecteurs propres de la matrice A :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Solution HS.23

1. Valeurs propres :

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 - \lambda & 2 \\ 1 & -1 & 4 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= -(\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12) = -(\lambda - 3)(\lambda - 2)^2 \end{aligned}$$

Il y a deux valeurs propres : $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$.

2. vecteurs propres : \mathbf{x}_1 est vecteur propres qui correspond à la valeurs propres $\lambda_1 = 3$ est solution de : $(1 - 3I)\mathbf{x}_1 = 0$. Alors :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = x_3$. Toute valeur non nulle correspond à x_3 produit un vecteur propre pour λ_1 . Si on prend $x_3 = 1 = x_2$, alors : $\mathbf{x}_1 = (0, 1, 1)^T$. On donne le vecteur propre à norme 1 : $\mathbf{x}_1 = (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T$. (en utilisant la norme $\|\cdot\|_2$).

Pour le vecteur propre associé à λ_2 , \mathbf{x}_2 , il doit satisfaire : $(A - 2I)\mathbf{x}_2 = 0$.
Donc :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, la seule condition à satisfaire est : $x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Si on pose : $x_1 = 0, x_3 = 1$, alors, $x_2 = 2$. Donc : $\mathbf{x}_2 = (0, 2, 1)^T$ (normalisé : $\mathbf{x}_2 = (0, 2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})^T$).

Exercice HS.24

Déterminer la norme l_2 de la matrice A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Solution HS.24

Pour calculer $\|A\|_2$ on suit le théorème : $\|A\|_2 = [\rho(A^T A)]^{1/2}$.

$$\begin{aligned} A^T A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(A^T A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 2 & -1 \\ 2 & 6 - \lambda & 4 \\ -1 & 4 & 5 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 42\lambda \\ &= -\lambda(\lambda^2 - 14\lambda + 42) \end{aligned}$$

$\det(A^T A - \lambda I) = 0$ donne les racines : $\lambda \in \{0, 7 + \sqrt{7}, 7 - \sqrt{7}\}$.

$$\|A\|_2 = \sqrt[2]{\rho(A^T A)} = \sqrt[2]{\max\{0, 7 + \sqrt{7}, 7 - \sqrt{7}\}} = \sqrt[2]{7 + \sqrt{7}} \approx 3.106.$$

Exercice HS.25

On appelle une matrice $n \times n$ A **convergente** si : $\lim_{k \rightarrow \infty} (A^k)_{ij} = 0$, pour tout i, j .

Soit la matrice A :

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

A est elle convergente ?

Solution HS.25

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 1/8 & 0 \\ 3/16 & 1/8 \end{bmatrix}, A^k = \begin{bmatrix} 1/16 & 0 \\ 1/8 & 1/16 \end{bmatrix}$$

$$\text{En général : } A^k = \begin{bmatrix} (1/2)^k & 0 \\ (k)/2^{k+1} & (1/2)^k \end{bmatrix}.$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1/2)^k = 0. \lim_{k \rightarrow \infty} (k/2^{k+1}) = 0$$

Exercice HS.26

Soit la matrice A :

$$A = \begin{bmatrix} -9 & -6 & -2 & -4 \\ -8 & -6 & -3 & -1 \\ 20 & 15 & 8 & 5 \\ 32 & 21 & 7 & 12 \end{bmatrix}.$$

Sans faire de calcul des valeurs/vecteurs propres, déterminer parmi les vecteurs suivants, lesquels sont vecteurs propres ? Identifier les valeurs propres correspondantes :

1. $v_1 = (-1, 1, 0, 1)^T$
2. $v_2 = (1, 0, -1, 0)^T$
3. $v_3 = (-1, 0, 2, 2)^T$
4. $v_4 = (0, 1, -3, 0)^T$

Solution HS.26

La réponse vient du produit Av_i , si Av_i est un multiple de v_i alors, v_i est un vecteur propre et le ratio est sa valeur propre associée.

1. $Av_1 = (-1, 1, 0, 1)^T = 1 * v_1 \iff v_1$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$.
2. $Av_2 = (-7, -5, 12, 25)^T \iff v_2$ n'est un vecteur propre.
3. $Av_3 = (-3, 0, 6, 6)^T = 3 * v_3 \iff v_3$ est un vecteur propre associé à la valeur propre : $\lambda_3 = 3$.
4. $Av_4 = (0, 3, -9, 0)^T = 3 * v_4 \iff v_4$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_3 = 3$.

Exercice HS.27

Sans faire de calculs, donner l'ensemble des valeurs propres des matrices suivantes :

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}.$$

Solution HS.27

1. $(T - \lambda I)$ est aussi triangulaire. Sachant que le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments diagonaux, alors : $\det(T - \lambda I) = \prod_{i=1}^n (t_{ii} - \lambda) \iff \{t_{ii}\}$ est l'ensemble des valeurs propre de T .
2. $(D - \lambda I)$ est aussi diagonale. Sachant que le déterminant d'une matrice diagonale est le produit des éléments diagonaux, alors : $\det(D - \lambda I) = \prod_{i=1}^n (d_i - \lambda) \iff \{d_i\}$ est l'ensemble des valeurs propre de D .