INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES
APPLIQUÉES DE ROUEN

INSA DE ROUEN

ASI 3.1

Analyse réelle et nombres complexes

Soufiane BELHARBI
soufiane.belharbi@insa-rouen.fr

01 Septembre 2016

Résumé

Ce support contient quelques rappels sur des notions de base de l'analyse réelle et les nombres complexes avec quelques exercices. C'est fait pour les étudiants ASI3.1.

Merci de me signaler les éventuelles erreurs dans les supports : soufiane.belharbi@insa-rouen.fr.
Keywords: Analyse réelle, intégrale, dérivée, nombre complexe.

Table des matières

1 Série 1 : Introduction rapide aux nombres complexes

Un nombre complexe z se présente en général sous forme algébrique comme une somme $a + ib$, où a et b sont des nombres réels quelconques et où i est un nombre particulier tel que $i^2 = -1$. Le a est appelé **partie réelle** de z et se note $Re(z)$. Le réel b est sa **partie imaginaire** et se note $Im(z)$.

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Un nombre complexe z est dit **imaginaire pur** ou **totalement imaginaire** si sa partie réelle est nulle, dans ce cas il s'écrit sous la forme $z = ib$. Un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle est dit réel. Le nombre réel 0 est le seul qui soit à la fois réel et imaginaire.

Quelques propriétés

Si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes, où x, y, x', y' sont des réels, on a :

a. Somme : $z + z' = (x + x') + i(y + y')$
b. Produit : $z \cdot z' = (xx' - yy') + i(xy' + yx')$
c. Conjugué : $\bar{z} = x - iy$
d. Partie réelle : $Re(z) = x$
e. Partie imaginaire : $Im(z) = y$
f. Module : $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$
g. Inverse : $\frac{1}{z} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Forme polaire

Pour tout couples de réels (a, b) différent du couple $(0, 0)$, il existe un réel positif r et une famille d'angle déterminés à un multiple de 2π près tels que $a = r\cos(\theta)$ et $b = r\sin(\theta)$.

Tout nombre complexe non nul peut être donc s'écrit sous une **forme trigonométrique** :

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)), \quad r > 0 \tag{1}$$

où r est appelé **le module** du complexe z et est noté $|z|$. Le réel θ est appelé **l'argument** du complexe z et est noté $arg(z)$. (voir Fig.3)

Forme exponentielle

Formule d'Euler

Pour tout réel θ, on note la formule d'Euler (Fig.2) :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{2}$$

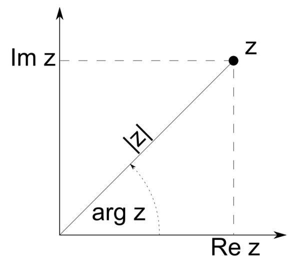

FIGURE 1 – Représentation géométrique d'un nombre complexe.

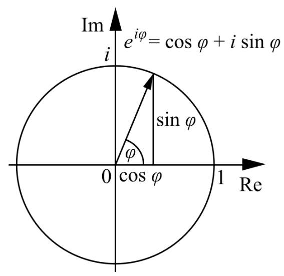

FIGURE 2 – La formule d'Euler.

On définit l'exponentielle d'un nombre complexe $z = x + iy$ par :

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \tag{3}$$

Si z est un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ, on peut alors écrire :

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad \bar{z} = re^{-i\theta} = r(\cos\theta - i\sin\theta) \tag{4}$$

Opérations sur la forme géométrique

Si $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ deux nombres complexes. on a :

a. $\left(re^{i\theta}\right)\left(r'e^{i\theta'}\right) = (rr')\, e^{i(\theta+\theta')}$

b. $\left(re^{i\theta}\right)^{-1} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$

Relation à la trigonométrie

$$\cos x = Re(e^{ix}) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \tag{5}$$

$$\sin x = Im(e^{ix}) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \tag{6}$$

Relations

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \tag{7}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \tag{8}$$

2 Introduction rapide au calcul intégral

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$.
On note $F = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ la primitive de f sur I.
On note : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) =: [F]_a^b$.

Propriétés

1) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$ (Fig.3)

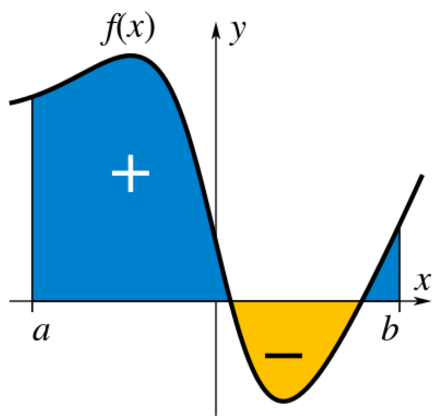

Figure 3 – Exemple d'une intégrale.

2) $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
3) Soit $c \in [a, b]$, on a : $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
4) $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
5) $\int_a^b (f + \lambda g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \lambda \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
6) $\int f'(g(x)).g'(x)\mathrm{d}x = f(g(x))$
7) $\frac{\mathrm{d}f(g(x))}{\mathrm{d}x} = f'(g(x)).g'(x)$

Primitives usuelles
(Tab.1)

f	$F = \int f$
$x^\alpha,\ \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x+\alpha}$	$\ln(x+\alpha)$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$e^{\alpha x}$	$\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$	$\frac{x^{-n+1}}{-n+1} = \frac{1}{(-n+1)x^{n-1}}$

TABLE 1 – Primitives usuelles.

Exercice 1
Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^1 x \mathrm{d}x$

b) $\int_{-1}^1 x^3 \mathrm{d}x$

c) $\int_{-1}^2 10 \mathrm{d}x$

d) $\int_1^3 x + 1 \mathrm{d}x$

e) $\int_1^4 (2x+1)^7 \mathrm{d}x$

f) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \mathrm{d}x$

g) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin 4x \mathrm{d}x$

h) $\int_0^2 3e^x \mathrm{d}x$

i) $\int_{-1}^1 e^{2x} \mathrm{d}x$

j) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x \mathrm{d}x$ (avec deux méthodes)

Solution 1

a) $\int_0^1 x \mathrm{d}x = 1/2$

b) $\int_{-1}^1 x^3 \mathrm{d}x = 0$

c) $\int_{-1}^2 10 \mathrm{d}x = 30$

d) $\int_1^3 x + 1 \mathrm{d}x = 6$

e) $\int_1^4 (2x+1)^7 \mathrm{d}x = \frac{9^8 - 3^8}{16}$

f) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \mathrm{d}x = 0$

g) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin 4x \mathrm{d}x = 0$

h) $\int_0^2 3e^x \mathrm{d}x = 3(e^2 - 1)$

i) $\int_{-1}^1 e^{2x} \mathrm{d}x = 1/2(e^2 - e^{-2})$

j) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x \mathrm{d}x = \pi/2$

3 Introduction rapide au calcul des dérivées

3.1 Nombre dérivé

Soit f une fonction définie continue dans un voisinage de x_0 contenant x_0. f est dérivable en x_0 ssi :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to +x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{9}$$

est définie.

Cette limite, noté $f'(x_0)$, est appelée nombre dérivé de f en x_0.

3.2 Fonction dérivée

Soit $D = [x_0 \in \mathbb{R}],\ f'(x_0)\ \textit{existe}.$

On définit la correspondance suivante :

$$\forall x_0 \in D \rightarrow f'(x_0) \in \mathbb{R} \tag{10}$$

la fonction dérivée première de f.

Fonction dérivée sur un intervalle
Soit f dérivable sur l'intervalle $]a, b[$, alors :

a) f est dérivable en x_0 $\forall x_0 \in]a, b[$
b) f est dérivable à droite de a
c) f est dérivable à gauche de b

Opérations sur les dérivées

1. $[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x)$
2. $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
3. $(\lambda u(x))' = \lambda u'(x)$
4. $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$
5. $[f[u(x)]]' = u'(x) \cdot f'[u(x)]$
6. $(a^f)' = a^f \cdot \ln(a) \cdot f'$
7. $(\log_a(f))' = \frac{f'}{f \cdot \ln a}$
8. $(f^g)' = g \cdot f^{g-1} \cdot f' + f^g \cdot \ln f \cdot g'$

Dérivées usuelles
(Tab.2)

Exercice 2

Calculer la fonction f' des fonctions f suivantes :

f	f'
C (constant)	0
x	1
$x^n,\ n \in \mathbb{N}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$x^n,\ n \in \mathbb{Z}$	nx^{n-1}
$x^{-n},\ n \in \mathbb{Z}$	$-nx^{-(n+1)}$
$x^a,\ a \in \mathbb{R}^+$	ax^{a-1}
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$a^x,\ a \in \mathbb{R}^{+*}$	$\ln x \times a^x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$tang\ x$	$\frac{1}{cos^2(x)}$
$arcsin\ x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$actan\ x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$arccos\ x$	$\frac{-1}{1-x^2}$

TABLE 2 – Dérivées usuelles.

1) $f = 2x^2 + 4x^4 - 5x + 7$
2) $f = -7 + 5x - 5/2x^2 - 3x^4$
3) $f = (-x + 7)^4$
4) $f = (2x^2 + 5x - 7)^9$
5) $f = 1/5x^{5/2} - 1/3x^{3/2}$
6) $f = x^2 - 5)^{7/2}$
7) $f = \sqrt{1 - x^3}$
8) $f = \sqrt[3]{3x^3 - 7}$
9) $f = \frac{6}{x} + \frac{7}{x^2} - \frac{1}{2x^5}$
10) $f = x^5(x + 2)^2$
11) $f = (x + 2)^3(x - 1/2)^2$
12) $f = \frac{x+2}{x-2}$
13) $f = \sin 2x$
14) $f = \cos(3x + 1)$
15) $f = tangx^2$
16) $f = 3\sin(3/2x^2 + 2)$
17) $f = 2\cos 2x + 7$
18) $f = \frac{1}{\sin x}$
19) $f = 7^{x^2-5x+4}$
20) $f = \ln 3x$
21) $f = e^{x^2}$

Solution 2

1) $f = 2x^2 + 4x^4 - 5x + 7$
$f' = 4x + 16x^3 - 5$
2) $f = -7 + 5x - 5/2x^2 - 3x^4$
$f' = 5 - 5x - 12x^3$
3) $f = (-x + 7)^4$
$f' = -4(-x + 7)^3$
4) $f = (2x^2 + 5x - 7)^9$
$f' = 9(4x + 5)(2x^2 + 5x - 7)^8$
5) $f = 1/5x^{5/2} - 1/3x^{3/2}$
$f' = 1/2x^{-3/2} - 1/2x^{-1/2}$
6) $f = (x^2 - 5)^{7/2}$
$f' = 7x(x^2 - 5)^{-5/2}$

7) $f=\sqrt{1-x^3}$
$f'=-3/2x^2(1-x^3)^{-1/2}$

8) $f=\sqrt[3]{3x^3-7}$
$f'=3x^2(3x^3-7)^{-2/3}$

9) $f=\frac{6}{x}+\frac{7}{x^2}-\frac{1}{2x^5}$
$f'=\frac{-6}{x^2}-\frac{14}{x^3}+\frac{5}{2x^6}$

10) $f=x^5(x+2)^2$
$f'=5x^4(x+2)^2+2x^5(x+2)$

11) $f=(x+2)^3(x-1/2)^2$
$f'=3(x+2)^2(x-1/2)^2+2(x+2)^3(x-1/2)$

12) $f=\frac{x+2}{x-2}$
$f'=\frac{-4}{(x-2)^2}$

13) $f=\sin 2x$
$f'=2\cos 2x$

14) $f=\cos 3x+1$
$f'=-3\sin 3x+1$

15) $f=tangx^2$
$f'=\frac{2x}{\cos^2 x^2}$

16) $f=3\sin(3/2x^2+2)$
$f'=9\cos(3/2x^2+2)$

17) $f=2\cos(2x+7)$
$f'=-4\sin(2x+7)$

18) $f=\frac{1}{\sin x}$
$f'=\frac{-\cos x}{\sin^2 x}$

19) $f=7^{x^2-5x+4}$
$f'=7^{x^2-5x+4}\cdot\ln 7\cdot(2x-5)$

20) $f=\ln 3x$
$f'=\frac{1}{x}$

21) $f=e^{x^2}$
$f'=2xe^{x^2}$

4 Retour aux intégrales

Opérations sur les primitives
(Tab.3) u et v sont des fonctions de primitives U et V sur un intervalle I.

f	$F=\int f$
$u+v$	$U+V$
$k\times u$	$k\times U$
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\frac{u'}{u^n}$	$\frac{-1}{(n-1)u^{u-1}}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$u'\cos u$	$\sin u$
$u'\sin u$	$-\cos u$
$u'e^u$	e^u
$\frac{u'}{u}$	$\ln u$

TABLE 3 – Opérations sur les primitives.

Exercice 3
Calculer les primitives F des fonctions f suivantes :

1) $f(x) = 1$
2) $f(x) = 3x$
3) $f(x) = 2x^2$
4) $f(x) = x + 3$
5) $f(x) = 3x^3 + 2$
6) $f(x) = x - 1$
7) $f(x) = x^2 + x$
8) $f(x) = (3x + 2)^4$
9) $f(x) = \sin 4x$
10) $f(x) = 4\cos -x$
11) $f(x) = -2\sin 2x$
12) $f(x) = \frac{1}{e^x}$
13) $f(x) = x^2 - e^{3x} + \sin 3x^2 - 1$
14) $f(x) = 2x(x^2 - 3)^4$
15) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-4}}$
16) $f(x) = 2x + \cos 3x - 6\sin(3x - 1)$
17) $f(x) = -9e^{-3x-1}$
18) $f(x) = \frac{4x-2}{x^2-x+3}$
19) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
20) $f(x) = \cos x \sin x$

Solution 3

1) $f(x) = 1$
   $F(x) = x$
2) $f(x) = 3x$
   $F(x) = 3/2x^2$
3) $f(x) = 2x^2$
   $F(x) = 2/3x^3$
4) $f(x) = x + 3$
   $F(x) = 1/2x^2 + 3x$
5) $f(x) = 3x^3 + 2$
   $F(x) = 3/4x^4 + 2x$
6) $f(x) = x - 1$
   $F(x) = 1/2x^2 - x$
7) $f(x) = x^2 + x$
   $F(x) = 1/3x^3 + 1/2x^2$
8) $f(x) = (3x + 2)^4$
   $F(x) = 1/15(3x + 2)^5$
9) $f(x) = \sin 4x$
   $F(x) = -1/4\cos 4x$
10) $f(x) = 4\cos -x$
   $F(x) = -4\sin -x$
11) $f(x) = -2\sin 2x$
   $F(x) = \cos 2x$
12) $f(x) = \frac{1}{e^x}$
   $F(x) = \frac{-1}{e^x}$
13) $f(x) = x^2 - e^{3x} + \sin 3x - 1$
   $F(x) = 1/3x^3 - 1/3e^{3X} - 1/3\cos 3x - 1$
14) $f(x) = 2x(x^2 - 3)^4$
   $F(x) = 1/5(x^2 - 3)^5$
15) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-4}}$
   $F(x) = 2/3\sqrt{3x - 4}$
16) $f(x) = 2x + \cos 3x - 6\sin(3x - 1)$
   $F(x) = x^2 + 1/3\sin 3x + 2\cos 3x - 1$
17) $f(x) = -9e^{-3x-1}$
   $F(x) = 3e^{-3x-1}$
18) $f(x) = \frac{4x-2}{x^2-x+3}$
   $F(x) = 2\ln(x^2 - x + 3)$
19) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
   $F(x) = 1/2\ln^2 x$
20) $f(x) = \cos x \sin x$
   $F(x) = 1/2\sin^2(x)$

Intégration par partie
u et v sont deux fonctions.

$$\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x \tag{11}$$

Exercice 4
Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_0^1 xe^x \mathrm{d}x$
2) $\int_0^1 x\sin x \mathrm{d}x$
3) $\int_0^1 x^2\cos x \mathrm{d}x$

Solution 4

1) $\int_0^1 xe^x \mathrm{d}x$
$\rightarrow u' = e^x, v = x, \int_a^b xe^x \mathrm{d}x = [e^x x]_0^1 - \int_0^1 e^x \mathrm{d}x = [e^x x]_0^1 - [e^x]_0^1 = 1$
2) $\int_0^1 x\sin x \mathrm{d}x$
$\rightarrow u' = \sin x, v = x, \int_0^1 x\sin x \mathrm{d}x = [-\cos(x)x]_0^1 - \int_0^1 -\cos x = [-\cos(x)x]_0^1 + [\sin x]_0^1 = \sin 1 - \cos 1$
3) $\int_0^1 x^2\cos x \mathrm{d}x$
$\rightarrow u' = \cos x, v = x^2, \int_0^1 x^2\cos x \mathrm{d}x = [\sin(x)x^2]_0^1 - 2\int_0^1 x\sin x = 2\cos 1 - \sin 1$

5 Nombres complexes

Soit : $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ et $z, w \in \mathbb{C}$.

1) $x = Re(z), y = Im(z)$
2) $z = x + iy \Longleftrightarrow (x, y)$ (Fig.4)
3) $(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v)$ (Fig.5)
4) Le module : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
5) $|z + w| \leq |z| + |w|$
6) $|z - w| \geq |z| - |w|$
7) $(x + iy)(u + iv) = xu - yv + i(xv + yu)$
8) $i^2 = -1$
9) L'inverse : pour $z \neq 0$, $z = x + iy$, $\frac{1}{z} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$ (Fig.6)
10) $1/i = -1$
11) Le conjugué de z : $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$
12) $\bar{\bar{z}} = z$
13) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
14) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
15) $|z| = |\bar{z}|$
16) $|z|^2 = z\bar{z}$
17) $1/z = \bar{z}/|z|^2$
18) $Re(z) = (z + \bar{z})/2$
19) $Im(z) = (z - \bar{z})/2i$
20) $|zw| = |z||w|$

Représentation Polaire

Chaque point $(x, y) \neq (0, 0)$ de l'espace peut être décrit par des coordonnées polaires $r, \theta \in \mathbb{R}$.

1) $z = x + iy$
2) Argument : $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|,\ \theta$: angle entre (x, y) et l'axe x ($+\ n2\pi$, $n \in \mathbb{N}$). (Fig.9)
3) $z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
4) $\theta = arg(z)$
5) La valeur principale de l'argument : $Arg(z) = arg(z)$ tel que : $-\pi < \theta \leq \pi$
6) $arg(z) = \{Arg(z) + 2\pi k : k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ (Fig.**??**)
7) $Arg(i) = \pi/2$, $Arg(1 - i) = -\pi/4$
8) $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
9) La représentation polaire : $z = re^{i\theta},\ r = |z|, \theta = arg(z)$

10) $e^{\theta+2\pi m} = e^{i\theta},\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

11) $e^{i\pi} = -1,\ e^{i\pi/2} = i,\ e^{i\pi/3} = \frac{1+\sqrt{3}i}{2},\ e^{i\pi/4} = \frac{1+i}{2}$ (Fig.7)

12) $e^{2\pi mi} = 1,\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

13) $|e^{i\theta}| = 1$

14) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

15) $1/e^{i\theta} = e^{-i\theta}$

16) $e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta}e^{i\varphi},\ -\infty < \theta, \varphi < \infty$

17) $\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi) = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

18) $arg(\bar{z}) = -arg(z)$

19) $arg(1/z) = -arg(z)$

20) $arg(z_1 z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$

21) $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

22) $\cos n\theta + i\sin n\theta = e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$

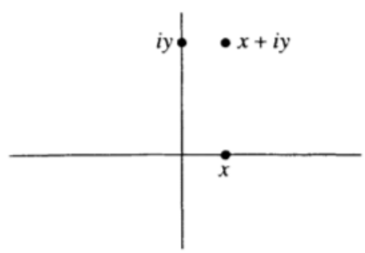

Figure 4 – .

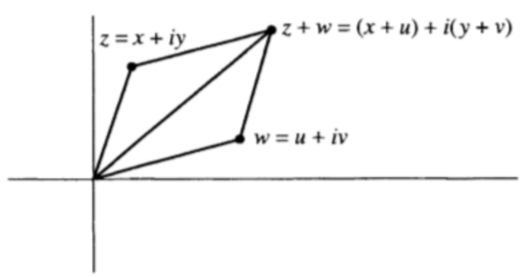

Figure 5 – .

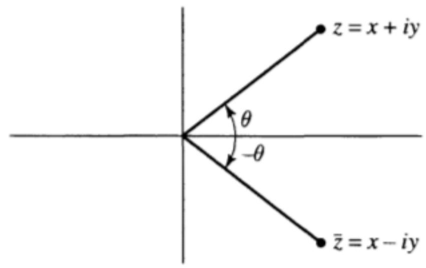

Figure 6 – .

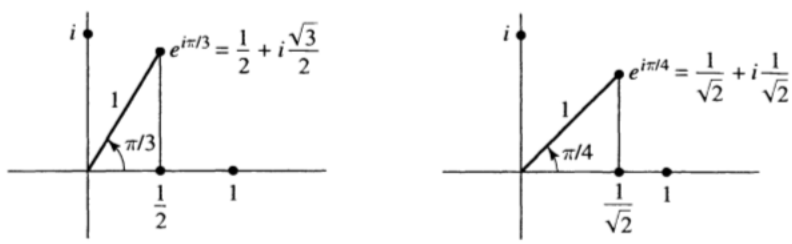

Figure 7 – .

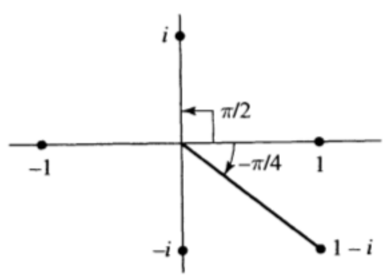

Figure 8 – .

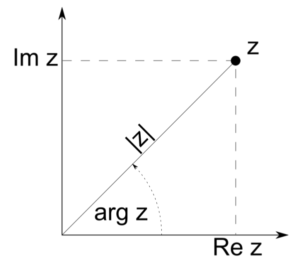

FIGURE 9 – Représentation géométrique d'un nombre complexe (retour).

sin et cos des angles connues

1) $\sin -\theta = -\sin\theta$
2) $\cos -\theta = \cos\theta$
3) $\tan -\theta = -\tan\theta$
4) $\sin\cos -\theta = \sin\cos\theta$
5) $\cos\sin -\theta = \cos -\sin\theta = \cos\sin\theta$
6) $\sin\theta + \cos\theta = 1$
7) $\sin(a \pm b) = \sin a\cos b \pm \sin b\cos a$
8) $\cos(a \pm b) = \cos a\cos b \mp \sin a\cos b$
9) $\sin(2a) = 1\sin a\cos a$
10) $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$
11) $\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$
12) $\sin(\theta/2) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$
13) $\cos(\theta/2) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$
14) $\tan\theta/2 = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$
15) $\sin a \pm \sin b = 2\sin\left(\frac{a\pm b}{2}\right)\cos\left(\frac{a\mp b}{2}\right)$
16) $\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$
17) $\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$

Exercice 5

Mettre sous la forme $x + iy$ les nombres suivants :

$\frac{3+6i}{3-4i}$; $\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i}$; $\frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$.

Solution 5

Note : $z \in \mathbb{C} : z\bar{z} = |z|^2$.

Dégrés	Radians	cos	sin	tan
0	0	1	0	0
30	$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}/3$
45	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60	$\pi/3$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}$
90	$\pi/2$	0	1	pas définie
120	$2\pi/3$	-1/2	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}$
135	$3\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	-1
150	$5\pi/6$	$-\sqrt{3}/2$	$1/2$	$-\sqrt{3}/3$
180	π	-1	0	0
210	$7\pi/6$	$-\sqrt{3}/2$	-1/2	$\sqrt{3}/3$
225	$5\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	1
240	$4\pi/3$	-1/2	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}$
270	$3\pi/2$	0	-1	undefined
300	$5\pi/3$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}$
315	$7\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1
330	$11\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	-1/2	$-\sqrt{3}/3$
360	2π	1	0	0

TABLE 4 – cos, sin et tan de quelques angles.

1) $\frac{3+6i}{3-4i} = -\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$

2) $\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} = \left(\frac{1+3i}{5}\right)^2 - \frac{3}{5} + \frac{6}{5}i = -\frac{23}{25} + \frac{36}{25}i.$

3) $\frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$. $(z + \bar{z} = 2x)$. $z = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2}i$. $\frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i} = z + \bar{z} = -3.$

Exercice 6

Mettre sous la forme $x + iy$ les nombres complexes suivants :

1. Nombre de module 2 et d'argument $\pi/3$.
2. Nombre de module 3 et d'argument $-\pi/8$.

Solution 6

1. $z_1 = 2e^{i\pi/3} = 2(\cos\pi/3 + i\sin\pi/3) = 2(1/2 + i\sqrt{3}/2) = 1 + i\sqrt{2}.$
2. $z_2 = 3e^{-i\pi/8} = 3(\cos\pi/8 + i\sin\pi/8) = \frac{3\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - \frac{3\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}i.$

Exercice 7

Calculer le module et l'argument de $u = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$; $v = 1 - i$. En déduire le module et l'argument de $w = u/v$.

Solution 7

1) $u = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \sqrt{2}\,(\cos\pi/6 - i\sin\pi/6) = \sqrt{2}e^{-i\pi/6}.$

2) $v = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}.$

3) $u/v = \frac{\sqrt{2}e^{-i\pi/6}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} = e^{-i\pi/6+i\pi/4} = e^{i\pi/12}.$

Exercice 8
On donne θ_0 un réel tel que : $\cos\theta_0 = 2/\sqrt{5}$ et $\sin\theta_0 = 1/\sqrt{5}$. Calculer le module et l'argument de chacun des nombres complexes suivants (en fonction de θ_0) :

1. $z_1 = 3i(2+i)(4+2i)(i+1)$.
2. $z_2 = \frac{(4+2i)(-1+i)}{(2-i)3i}$.

Solution 8

1. $z_1 = 3i(2+i)(4+2i)(i+1)$.

$$\begin{aligned}
|z_1| &= |3i(2+i)(4+2i)(i+1)| \\
&= |3i| \times |2+i| \times |4+2i| \times |i+1| \\
&= 3 \times \sqrt{2^2+1^2} \times 2 \times |2+i| \times \sqrt{1^2+1^2} \\
&= 6\left(\sqrt{2^2+1^2}\right)^2 \times \sqrt{2} \\
&= 6 \times 5\sqrt{2} = 30\sqrt{2}\ .
\end{aligned}$$

.

$$\begin{aligned}
arg(z_1) &= arg(3i(2+i)(4+2i)(i+1)) \\
&= arg(3i) + arg(2+i) + arg(4+2i) + arg(i+1) + 2k\pi \\
&= \pi/2 + arg(2+i) + arg(2(2+i)) + \pi/4 + 2k\pi \\
&= 3\pi/4 + arg(2+i) + arg(2) + arg(2+i) + 2k\pi \\
&= 3\pi/4 + 2arg(2+i) + 2k\pi\ .
\end{aligned}$$

. Soit θ un argument de $2+i$, donc : $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{2^2+1^2}} = 2/\sqrt{5}$, et $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}} = 1/\sqrt{5}$. Donc : $\cos\theta = \cos\theta_0$ et $\sin\theta = \sin\theta_0$. on en déduit que : $\theta = \theta_0 + 2k\pi$. Ensuite, $arg(z_1) = 3\pi/4 + 2\theta_0 + 2k\pi$.

2. $z_2 = \frac{(4+2i)(-1+i)}{(2-i)3i}$.

$$\begin{aligned}
|z_2| &= |\frac{(4+2i)(-1+i)}{(2-i)3i}| \\
&= \frac{|4+2i| \times |-1+i|}{|2-i| \times |3i|} \\
&= \frac{2 \times |2+i| \times \sqrt{(-1)^2+1^2}}{\sqrt{2^2+(-1)^2} \times 3} \\
&= \frac{2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{2}}{\sqrt{5} \times 3} \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3}\ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} arg(z_2) &= arg(\frac{(4+2i)(-1+i)}{(2-i)3i}) \\ &= arg(4+2i) + arg(-1+i) - arg(2-i) - arg(3i) \\ &= \theta_0 + 3\pi/4 - (-\theta_0) - \pi/2 + 2k\pi \\ &= \pi/4 + 2\theta_0 + 2k\pi\ . \end{aligned}$$

Exercice 9

Mettre sous la forme algébrique $(x+iy)$ les nombres complexes suivants :

1) $z_1 = 1e^{2i\pi/3}$
2) $z_2 = \sqrt{2}e^{i\pi/8}$
3) $z_3 = 3e^{-7i\pi/8}$
4) $z_4 = \left(2e^{i\pi/4}\right)\left(3e^{-3i\pi/4}\right)$
5) $z_5 = \frac{2e^{i\pi/4}}{3e^{-3i\pi/4}}$
6) $z_6 = \left(2e^{i\pi/3}\right)\left(3e^{5i\pi/6}\right)$
7) $z_7 = \frac{2e^{i\pi/3}}{3e^{5i\pi/6}}$
8) z_8, le nombre de module 2 et d'argument $\pi/3$.
9) z_9, le nombre de module 3 et d'argument $-\pi/8$.

Solution 9

1) $z_1 = 1e^{2i\pi/3} = 2\left(\cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)\right) = 2(-1/2 + i\sqrt{3}/2)$
2) $z_2 = \sqrt{2}e^{i\pi/8} = \sqrt{2}\left(\cos(\pi/8) + i\sin(\pi/8)\right) = \sqrt{2}\cos(\pi/8) + i\sqrt{2}\sin(\pi/8)$
3) $z_3 = 3e^{-7i\pi/8} = 3\left(\cos(-7\pi/8) + i\sin(-7\pi/8)\right) = 3\cos(7\pi/8) - 3\sin(7\pi/8)$
4) $z_4 = \left(2e^{i\pi/4}\right)\left(3e^{-3i\pi/4}\right) = 6e^{i(\pi/4-3\pi/4)} = 6e^{-i\pi/2} = -6i$
5) $z_5 = \frac{2e^{i\pi/4}}{3e^{-3i\pi/4}} = 2/3e^{i(\pi/4+3\pi/4)} = 2/3e^{i\pi} = -2/3$
6) $z_6 = \left(2e^{i\pi/3}\right)\left(3e^{5i\pi/6}\right) = 6e^{i(\pi/3+5\pi/6)} = 6e^{7\pi/6} = 6(\cos(7\pi/6) + i\sin 7\pi/6) = 6(-\sqrt{3}/2 - i1/2)$
7) $z_7 = \frac{2e^{i\pi/3}}{3e^{5i\pi/6}} = 2/3e^{i(\pi/3-5\pi/6)} = 2/3e^{-i\pi/2} = 2/3(\cos(-\pi/2) + i\sin-\pi/2) = -2/3i$
8) z_8, le nombre de module 2 et d'argument $\pi/3$. $z_8 = 2e^{i\pi/3} = 2(\cos\pi/3 + i\sin\pi/3) = 2(1/2 + i\sqrt{3}/2) = 1 + i\sqrt{3}$
9) z_9, le nombre de module 3 et d'argument $-\pi/8$. $z_9 = 3e^{-i\pi/8} = 3(\cos-\pi/8 + i\sin-\pi/8) = 3\cos\pi/8 - 3i\sin\pi/8$

Exercice 10

Soit $u = 1+i$ et $v = -1+i\sqrt{3}$.

1) Déterminer les modules de u et v.
2) Déterminer un argument de u et un argument de v.
3) Déterminer le module et un argument de $\frac{u}{v}$.
4) En déduire les valeurs de $\cos(-5\pi/12)$ et $\sin(-5\pi/12)$.

Solution 10

$u = 1 + i$ et $v = -1 + i\sqrt{3}$.

1) $|u| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. $|v| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = 2$.
2) $u = \sqrt{2}\left(\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Donc, $arg(u) = \pi/4$. $v = 2\left(-1/2 + i\sqrt{3}/2\right) = 2e^{2i\pi/3}$. Donc, $arg(v) = 2\pi/3$.
3) $u/v = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{2e^{2i\pi/3}} = \sqrt{2}/2e^{i(\pi/4-2\pi/3)} = \sqrt{2}/2e^{-5\pi/12} = \sqrt{2}/2\left(\cos(-5\pi/12) + i\sin(-5\pi/12)\right)$.
   On a de l'autre côté : $u/v = \frac{1+i}{-1+i\sqrt{3}} = \frac{(1+i)(-1-i\sqrt{3})}{4} = \frac{-1+\sqrt{3}+i(-1-\sqrt{3})}{4}$.
   Par conséquent :

$$\begin{cases} \sqrt{2}/2\cos(-5\pi/12) & = \frac{-1+\sqrt{3}}{4} \\ \sqrt{2}/2\sin(-5\pi/12) & = \frac{-1-\sqrt{3}}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(-5\pi/12) & = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\ \sin(-5\pi/12) & = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

Exercice 11

Soit z un nombre complexe de module ρ, d'argument θ, et soit son conjugué $\bar{z}$. Calculer $(z+\bar{z})(z^2+\bar{z}^2)\ldots(z^n+\bar{z}^n)$ en fonction de ρ et θ.

Solution 11

Écrivant $z = \rho e^{i\theta}$, alors $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$. Donc :

$$\begin{aligned}
P &= \prod_{k=1}^{n} \left(z^k + \bar{z}^k\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \rho^k \left(\left(e^{i\theta}\right)^k + \left(e^{-i\theta}\right)^k\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \rho^k \left(e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n} 2\rho^k \cos(k\theta) \\
&= 2^n \cdot \rho \cdot \rho^2 \cdot \rho^3 \cdot \cdots \cdot \rho^n \prod_{k=1}^{n} \cos(k\theta) \\
&= 2^n \cdot \prod_{i=1}^{n} \rho^i \cdot \prod_{k=1}^{n} \cos(k\theta) \\
&= 2^n \cdot \rho^{n(n+1)/2} \cdot \prod_{k=1}^{n} \cos(k\theta).
\end{aligned}$$

Exercice 12

Soit $z = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

1. Calculer z^2, puis déterminer le module et un argument de z^2, puis écrire z^2 sous forme trigonométrique.
2. En déduire le module et un argument de z. $(0 \leq arg(z) \leq \pi)$
3. En déduire $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Solution 12

$z = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

1. $$\begin{aligned}
z^2 &= \left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 = 2+\sqrt{3} - (2-\sqrt{3}) + 2i\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}} \\
&= 2\sqrt{3} + 2i\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2\sqrt{3} + 2i\sqrt{2^2-3} = 2\sqrt{3} + 2i
\end{aligned}$$

   $|z^2| = \sqrt{(2\sqrt{3}) + 2^2} = \sqrt{4 \times 3 + 4} = \sqrt{16} = 4.$

   Si on pose $\theta = arg(z^2)$, $\cos\theta = 2\sqrt{3}/4 = \sqrt{3}/2$ et $\sin\theta = 2/4 = 1/2$. Donc $\theta = \pi/6 + 2k\pi$.
2. On déduit de la première question que $|z^2| = 4$ donc $|z|^2 = 4$ et que $|z| = 2$. Et les arguments possible de z sont $1/2\,(\pi/6 + 2k\pi) = \pi/12 + k\pi$, $k \in$

$\{0,1\}$. Donc, $z = 2e^{i\pi/12}$ ou $z = -2e^{i\pi/12}$. Mais $z = \sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$ entraine que le cosinus et le sinus de ses arguments sont positifs. Donc, $z = 2e^{i\pi/12}$.

3. D'après la question précédente : $2e^{i\pi/12} = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}} \Leftrightarrow 2\left(\cos\left(\pi/12\right) + i\sin\left(\pi/12\right)\right) = \sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cos\left(\pi/12\right)+i\sin\left(\pi/12\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\pi/12\right) & = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \\ \sin\left(\pi/12\right) & = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \end{cases}$

6 Intégration par partie et changement de variable

Intégration par partie
u et v sont deux fonctions.

$$\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x \qquad (12)$$

Exercice 6.1
Calculer les primitives suivantes :

1) $\int x \cdot \ln x \mathrm{d}x$
2) $\int x^2 \cdot \ln x \mathrm{d}x$
3) $\int \ln x \mathrm{d}x$

Solution 6.1

1) $\int x \cdot \ln x dx$. On pose : $u' = x, v = \ln x$. Donc :

$$\begin{aligned}\int x \cdot \ln x \mathrm{d}x &= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} \\ &= \frac{x^2}{4}(2\ln(x) - 1) \ .\end{aligned}$$

2) $\int x^2 \cdot \ln x \mathrm{d}x$. On pose : $u' = x^2, v = \ln x$. Donc :

$$\begin{aligned}\int x^2 \cdot \ln x \mathrm{d}x &= [\frac{x^3}{3}\ln x] - \frac{1}{3}\int x^2\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} \\ &= \frac{3x^3\ln(x) - x^3}{9} \\ &= \frac{x^3(3\ln(x) - 1)}{9} \ .\end{aligned}$$

3) $\int \ln x \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln x \mathrm{d}x$. On pose : $u' = 1, v = \ln x$. Donc :

$$\begin{aligned}\int 1 \cdot \ln x \mathrm{d}x &= x\ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ &= x \cdot \ln(x) - x \ .\end{aligned}$$

7 Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles [1]

Fraction rationnelles :
Une fraction rationnelle est une expression formelle de la forme $\frac{P}{Q}$, ou P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}$, avec $Q \neq 0$ (Q n'est pas le polynôme nul).

On appelle **forme irréductible d'une fraction rationnelle** R toute écriture de la forme $\frac{P}{Q}$ où P et Q n'admettent aucun facteur commun dans leur décomposition en produit de facteurs irréductibles.

Si $F = \frac{P}{Q}$ est une fraction rationnelle, la quantité $deg(P) - deg(Q)$ est appelée degré de F et notée $deg(F)$.

Exemple : La fraction rationnelle $\frac{(x^2-2x+4)(x-2)}{x^3(x-2)^2}$ n'est pas irréductible. Elle est égale à la fraction rationnelle $\frac{x^2-2x+4}{x^3(x-2)}$ qui est sa forme irréductible. Son degré est $3 - 5 = -2$.

Définition : Soit $F = \frac{P}{Q}$ sous forme irréductible. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

— On dit que α est un zéro ou une racine de F si α est une racine de P.

— On dit que α est un pôle de F si α est une racine de Q. On parle de l'ordre de multiplicité du pôle comme on parlait de l'ordre de multiplicité d'une racine. Un pôle d'ordre 1 est dit simple.

Exemple : Dans $\mathbb{R}$, la fraction rationnelle $\frac{(x^2+x+1)(x-1)^2 x}{(x-2)(x^2+1)(x+1)^4}$ admet :

— Pour zéros : 1 et 0.

— Pour pôles : -1 (de multiplicité 4), et 2 (pôle simple).

Décomposition en éléments simples (DES) :
On peut décomposer toute fraction rationnelle en somme de fractions élémentaires plus simples, au sens où leurs dénominateurs ne feront apparaître qu'un seul polynôme irréductible chacun.

Partie entière :
Soit $F = \frac{P}{Q}$. Il existe un unique polynôme E et une unique fraction rationnelle G telle que : $F = E + G$ *et* $deg(G) < 0$. Le polynôme E est appelé la partie entière de F. Elle est égale au quotient de la division euclidienne de P par Q.

Méthode : Pour déterminer la partie entière d'une fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$:

— Si $deg(F) < 0$, alors la partie entière est le polynôme nul.

— Si $deg(F) \geq 0$, alors on effectue la division euclidienne de P par Q, et la partie entière est le quotient de la division. On obtient en effet $P = QE + R$, avec $deg(R) < deg(Q)$, donc : $\frac{P}{Q} = \frac{QE+R}{Q} = \frac{QE}{Q} + \frac{R}{Q} = E + \frac{R}{Q}$, avec E est la partie entière, et $deg(\frac{R}{Q}) < 0$.

1. Crédit : Gaëlle Chagnylmrs.univ-rouen.fr/Persopage/Chagny/FractionsRationnellesDES.pdf.

Exemple :

1) $F = \frac{x}{x^2-4}$ a pour partie entière 0.

2) $F = \frac{x^5+1}{x(x-1)^2}$ a pour partie entière x^2+2x+3.

3) $F = \frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$ a pour partie entière 0.

4) $F = \frac{4x^3}{(x^2-1)^2}$ a pour partie entière 0.

Division euclidienne des polynômes :
Voici un exemple de la division euclidienne $\frac{P}{Q} = \frac{x^5+1}{x(x-1)^2} = QE + R$.

$$
\begin{array}{r|l}
x^5 \qquad\qquad\qquad +1 & x^3-2x^2+x \\
\cline{2-2}
- \quad x^5-2x^4-x^3 \qquad\qquad & x^2+2x+3 \\
\cline{1-1}
2x^4-x^3 \qquad +1 & \\
- \quad 2x^4-4x^3+2x^2 \qquad & \\
\cline{1-1}
3x^3-2x^2 \quad +1 & \\
- \quad 3x^3-6x^2+3x & \\
\cline{1-1}
4x^2-3x+1 &
\end{array}
$$

Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$
Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle sous forme irréductible, de partie entière E. On considère la décomposition de Q en produit de polynômes irréductibles :

$$
Q = \lambda \prod_{k=1}^{r} (x-\alpha_k)_k^m \prod_{l=1}^{s} (x^2+\beta_l x+\gamma_l)_l^n. \tag{13}
$$

Alors, il existe des familles uniques de réels $(A_{k,i})_{\substack{1\le k\le r,\\ 1\le i\le m_k}}$, $(B_{l,j})_{\substack{1\le l\le s,\\ 1\le j\le n_l}}$, et $(C_{l,j})_{\substack{1\le l\le s,\\ 1\le j\le n_l}}$ telle que :

$$
F = \underbrace{E}_{\text{Partie entière}} + \sum_{k=1}^{r} \underbrace{\sum_{i=1}^{m_k} \frac{A_{k,i}}{(x-\alpha_k)^i}}_{\text{Partie polaire associée au pôle } \alpha_k} + \sum_{l=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_l} \frac{B_{l,j}x+C_{l,j}}{(x^2+\beta_l x+\gamma_l)^j}. \tag{14}
$$

On appelle cette écriture la décomposition en éléments simples (DES) de F sur $\mathbb{R}$. Elle est donc unique.

Remarque : Dans le cas où la fraction $F = \frac{P}{Q}$ admet pour pôle d'ordre m un réel α (ce qui signifie $Q = (x-\alpha)^m Q_1$ avec Q_1 un polynôme de réels tel que $Q_1(\alpha) \neq 0$) on peut donc écrire F sous la forme :

$$
F = \frac{A_1}{(x-\alpha)} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-\alpha)^m} + F_0 = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{(x-\alpha)^i}}_{\text{partie polaire associée au pôle}} + F_0
$$

Pour F_0 une certaine fraction rationnelle n'admet pas α pour pôle, et où les A_i sont des réels ($i = 1, \ldots, m$).

Exemples : $A, B, C, D, \ldots$ désignent des réels.

1. $F = \frac{x}{x^2-4}$ a une DES de la forme
$$F = \underbrace{\frac{A}{x-2}}_{\text{Partie polaire associée au pôle 2}} + \underbrace{\frac{B}{x+2}}_{\text{Partie polaire associée au pôle -2}}$$
2. $F = \frac{x^5+1}{x(x-1)^2}$ a une DES de la forme
$$F = \underbrace{x^2+2x+3}_{\text{Partie entière}} + \underbrace{\frac{A}{x}}_{\text{Partie polaire associée au pôle 0}} + \underbrace{\frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}}_{\text{Partie associée au pôle -1}}$$
3. $F = \frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$ a une DES de la forme
$F = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$
4. $F = \frac{4x^3}{(x^2-1)^2}$ a une DES de la forme
$F = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}$.

Méthodes pratiques de la DES dans $\mathbb{R}$: calcul des coefficients

1) **Technique de base : multiplication/substitution :** Soit α un pôle d'ordre m d'une fraction rationnelle F. Pour déterminer le coefficient de $\frac{1}{(x-\alpha)^m}$ dans la DES de F, on multiple F d'une part, et sa DES d'autre part, par $(x-\alpha)^m$ et on évalue l'égalité obtenue en remplaçant x par α.
Remarque : Cette technique va permettre de déterminer entièrement la DES de fractions rationnelles n'admettant que des pôles simples. Pour les pôles multiples, d'autres techniques sont données ci-dessous, mais on peut également raisonner de proche en proche : en calculant $F - \frac{A}{(x-\alpha)^m}$ (où A est le coefficient déjà trouvé), on obtient une fraction dont α est pôle d'ordre $m-1$, et on peut recommencer.
Exemples :
   (a) $F = \frac{x}{x^2-4}$ a une DES de la forme $F = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+2)}$.
   $\rightarrow$ Calcule de A : Le pôle $\alpha = 2$ est simple (ordre $m = 1$). On multiple donc de part et d'autre de l'égalité ci-dessus par $(x-2)$ et on évalue en 2 la nouvelle égalité :
$$\frac{x}{x^2-4} \times (x-2)|_{x=2} = \left(\frac{A}{x-2} \times (x-2) + \frac{B}{x+2} \times (x-2)\right)_{x=2}$$
$$\Longleftrightarrow \frac{x}{x+2}|_{x=2} = \frac{1}{2} = A.$$
   $\rightarrow$ Calcule de B : De même, on multiple par $(x+2)$ et on évalue en -2. On trouve $B = \frac{1}{2}$. Ainsi la DES de F est $F = \frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{2(x+2)}$
   (b) $F = \frac{x^5+1}{x(x-1)^2}$ a une DES de la forme $F = x^2+2x+3+\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$.
   $\rightarrow$ Calcule de A et C :

— On multiple par x, et on évalue à 0. On trouve $A = 1$.

— On multiple par $(x-1)^2$ et on évalue en 1. On trouve $C = 2$.

Donc $F = x^2 + 2x + 3 + \frac{1}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$.

$\rightarrow$ Calcule de B : On peut calculer

$F - \frac{2}{(x-2)^2} = \frac{x^5+1}{x(x-1)^2} - \frac{2}{(x-1)^2} = \frac{x^5-2x+1}{(x-1)^2 x}$

En divisant $(x^2 - 2x + 1)$ par $(x-1)$, on obtient $(x^5 - 2x + 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x - 1)$, et on a donc

$F - \frac{2}{(x-1)^2} = \frac{x^4+x^3+x^2+x-1}{x(x-1)}$.

On ré-applique la méthode ci-dessus (sur la dernière fraction, 1 n'est plus un pôle double mais simple), et on obtient $B = 3$, et donc la fin de la DES de $F = x^2 + 2x + 3 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$.

2) **Évaluation :** Lorsqu'il ne reste plus que quelques coefficients (un ou deux, ...) à déterminer, ou si on chercher des relations entre les coefficients, on peut substituer à x des valeurs simples.

Exemple : Lorsqu'on obtient, pour $\frac{x^5+1}{x(x-1)^2}$, $F = x^2 + 2x + 3 + \frac{1}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$, ci-dessus, aux lieu de répéter la méthode multiplication/substitution, on peut substituer à x la valeur -1 : on obtient

$F(-1) = \frac{(-1)^5+1}{(-1)(-1-1)^2} = (-1)^2 + 2(-1) + 3 + \frac{1}{-1} + \frac{B}{-1-1} + \frac{2}{(-1-1)^2} \iff 0 = \frac{-B}{2} + \frac{3}{2}$,

ce qui donne bien $B = 3$.

3) **Parité :** Soit F est une fraction rationnelle paire ou impaire. Si α est un pôle d'ordre m de F, alors $-\alpha$ est un pôle d'ordre m de F. En comparant les DES de $F(x)$ et $F(-x) = \pm F(x)$, et en utilisant leur unicité, on obtient des relations entre les coefficients de la DES de F.

Exemple : $F = \frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$ est paire : $F(x) = F(-x)$. Donc

$F(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2} = \frac{-A}{x+1} + \frac{-B}{x-1} + \frac{-Cx+D}{x^2+1} + \frac{-Ex+F}{(x^2+1)^2} = F(-x)$.

Par unicité de la DES, on en déduit $A = -B$ et $C = E = 0$. On a donc plus que 3 coefficients à calculer au lieu de 6 :

$F(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{A}{x+1} + \frac{D}{x^2+1} + \frac{F}{(x^2+1)^2}$.

$\rightarrow$ Calcule de A : On multiple par $(x-1)$, et on évalue en $x = 1$: $A = \frac{1}{8}$.

$\rightarrow$ Calcule de F : On multiple par $(x^2+1)^2$, et en évalue en $x = i$: $F = \frac{-1}{2}$.

$\rightarrow$ Calcule de D : On substitue 0 à x : $-1 = \frac{-1}{8} - \frac{1}{8} + D - \frac{1}{2}$, donc $D = \frac{-1}{4}$.

Finalement, $F(x) = \frac{1}{8(x-1)} - \frac{1}{8(x+1)} - \frac{1}{4(x^2+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)^2}$.

4) **Limite (technique asymptotique) :** Soit F est une fraction rationnelle de degré strictement négatif. Alors, la fraction $x \mapsto xF(x)$ a une limite finie en l'infini. On peut ainsi trouver des relations entre les coefficients de la DES de F.

Exemple : $F = \frac{4x^3}{(x^2-1)^2}$ a une DES de la forme $F = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}$.

— Parité. F est impaire, donc
$-F(x) = \frac{-1}{x-1} + \frac{-B}{(x-1)^2} + \frac{-C}{x+1} + \frac{-D}{(x+1)^2} = \frac{-A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{-C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} = F(-x)$.
D'où $A = C$ et $B = -D$. Ainsi, $F = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$.

— $\rightarrow$ Calcule de B : On multiple par $(x-1)^2$ et on évalue en 1. on obtient $B = 1$.

— $\rightarrow$ Calcule de A : D'une part $\lim_{x\to\infty} xF(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^4}{(x^2-1)^2} = 4$ et d'autre part
$\lim_{x\to\infty} xF(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{Ax}{x-1} + \frac{x}{(x-1)^2} + \frac{Ax}{x+1} + \frac{x}{(x+1)^2} = 2A$.
Donc $2A = 4$ puis $A = 2$.
Finalement,
$F = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$.